

Verallgemeinerungen des Borsuk-Ulamschen Koinzidenzsatzes

Cornel Schupp

1981



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Verallgemeinerungen des Borsuk-Ulamschen Koinzidenzsatzes

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Cornel Schupp
aus Langenargen

im Mai 1981



1. Berichterstatter : Prof. Dr. H. Steinlein
2. Berichterstatter : Prof. Dr. H. W. Schuster

Tag der mündlichen Prüfung : 1.12.1981

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
Kapitel I	
1. Das Geschlecht eines topologischen Raumes M bezüglich einer freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M .	9
2. Das Geschlecht eines Raumes und Ljusternik-Schnirelmann-Kategorie. Ein Satz von Krasnosel'skii.	15
3. Einige Hilfssätze.	18
Kapitel II	
4. Konfigurationsräume und ihr Geschlecht.	23
5. Verallgemeinerungen des Satzes von Borsuk-Ulam.	32
Kapitel III	
6. Optimalität der Resultate in II,5. Ein Beispiel.	37
7. Die Frage der Optimalität für spezielle topologische Räume.	38
Kapitel IV	
8. Homologie und Geschlecht eines Raumes.	56
9. Einordnung von Resultaten von Cohen, Connett, Lusk, Munkholm in den Rahmen der Theorie des Geschlechts eines Raumes.	88
Anhang	92
Bezeichnungen	96
Literatur	99

Einleitung

In [1] werden folgende drei äquivalente Sätze bewiesen:

(1) Jede stetige und ungerade Abbildung einer Sphäre S^n in sich ist wesentlich, d.h. nicht homotop zu einer konstanten Abbildung.

(2) Es sei $h: S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und es gelte $n \geq m$. Dann gibt es ein $x \in S^n$ mit $h(x) = h(-x)$.

(Koinzidenzsatz von Borsuk-Ulam)

(3) Es seien $A_1, \dots, A_k$ abgeschlossene Teilmengen von S^n mit $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ für $i = 1, \dots, k$ und $\bigcup_{i=1}^k A_i = S^n$.

Dann ist $k \geq n+2$.

(Überdeckungssatz von Borsuk-Ljusternik-Schnirelmann)

Diese Sätze stellen eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes dar. (Brouwerscher Fixpunktsatz: Jede stetige Abbildung einer kompakten und konvexen Teilmenge eines Raumes $\mathbb{R}^n$ in sich hat einen Fixpunkt.) Der Brouwersche Fixpunktsatz, welcher zu den wichtigsten Grundlagen der nichtlinearen Funktionalanalysis zählt, ist nämlich äquivalent zu der Aussage, daß die identische Abbildung einer Sphäre S^n wesentlich ist, und diese Aussage ist ein Spezialfall von (1).

Die Resultate von Borsuk sind in verschiedener Weise verallgemeinert worden. Unter anderem haben H. Hopf, M.A. Krasnosel'skii, P.E. Conner, E.E. Floyd, F.E. Browder, F. Wille (vgl. [12,14,15,6,2,25]) an Verallgemeinerungen der Sätze (1), (2), (3) gearbeitet. Die vorliegende Arbeit orientiert sich besonders an solchen Verallgemeinerungen von (2), wie sie in den letzten Jahren von C.-T. Yang, A.S. Švarc H.J. Munkholm, F. Cohen, J.E. Connett, E.L. Lusk und H. Steinlein angegeben wurden. (Vgl. [26,27,23,24,19,3,4,5,7],

[16,22]) Zur Beschreibung dieser Verallgemeinerungen ist es zweckmäßig, Satz (2) umzuformulieren: Es sei $h : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $f := -id_{S^n}$. Unter der Voraussetzung $n \gg m$ liefert (2) dann gerade die Existenz eines $x \in S^n$ mit $h(x) = h(f(x))$. Betrachtet man anstelle des Raumes S^n allgemeiner einen topologischen Raum M und anstelle der fixpunktfreien Involution $-id_{S^n}$ eine fixpunktfreie stetige Abbildung $f : M \rightarrow M$ mit $f^p = id_M$, p prim, - solche Abbildungen f werden im folgenden als freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen auf M bezeichnet - und $h : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, so werden folgende Fragestellungen nahegelegt:

Frage (a):

Es sei $q \in \{2, \dots, p\}$ und es seien $i_1, \dots, i_q \in \{0, \dots, p-1\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_q$. Unter welchen Bedingungen an M existiert dann zu jedem h ein $x \in M$ mit $h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x)) = \dots = h(f^{i_q}(x))$?

Abgeschwächte Frage (a'):

Es sei q wie oben. Unter welchen Bedingungen an M existieren dann zu jedem h ein $x \in M$ und $i_1, \dots, i_q \in \{0, \dots, p-1\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_q$, mit $h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x)) = \dots = h(f^{i_q}(x))$?

Antworten zu diesen Fragen sind von Yang, Munkholm, Cohen, Connnett, Lusk, Švarc und Steinlein angegeben worden, wobei teilweise anstelle des Raumes $\mathbb{R}^m$ auch noch andere Mannigfaltigkeiten betrachtet werden, vgl. hierzu etwa [4]. (Verallgemeinerungen dieser Art werden jedoch hier nicht untersucht.) In ihren oben zitierten Arbeiten werden mit Ausnahme von [5] die Fälle $q = p$ bzw. $q = 2$ behandelt. In [5] werden zudem noch solche q betrachtet, für die $q \gg \frac{1}{2}(p+1)$ gilt.

Die Bedingungen an M werden bei Munkholm, Cohen, Connnett, Lusk durch homologische Eigenschaften oder Zusammenhangseigenschaften von M ausgedrückt. Einen alternativen Zugang zu Sätzen vom Borsuk-Ulam Typ bieten das in [24] entwickelte algebraisch-topologische Konzept des "Geschlechts eines Faserraumes" und verwandte Konzepte. Eine wesentliche Rolle in der vorliegenden Arbeit spielt insbesondere das "Geschlecht $g'(M, f)$ bzw. $g(M, f)$ eines Raumes M bzgl. einer freien

$\mathbb{Z}_p$ -Aktion f auf M " (bzgl. Definitionen vgl. [24] Definition 15, [23], [22] Definition 2 und Definition (1.5), (1.6) hier). Mit dem Geschlecht $g'(M, f)$ bzw. $g(M, f)$ eng verwandte Konzepte wurden schon von Krasnosel'skiĭ und von Yang ("B-Index") eingeführt und auf Probleme verschiedener Art angewendet (vgl. [15*], Chapter VI, §4, [15], [27]). In [27] sind unter anderem auch Verallgemeinerungen des Borsuk-Ulamschen Satzes für kompakte Räume M mit fixpunktfreien Involutionen enthalten.

Die Methoden von Krasnosel'skiĭ und Yang sind von Švarc [23, 24] weiter ausgebaut worden. In [24] wird der Begriff des Geschlechts eines Faserraumes von verschiedenen Blickpunkten aus beleuchtet und es werden eine Reihe von Charakterisierungen angegeben. In Chapter VII findet man verschiedene topologische Anwendungen dieses Konzepts, unter anderem werden auch Verallgemeinerungen von Satz (2) für normale Räume M mit freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen bewiesen, vgl. Theorem 29, Korollar zu Theorem 29, Theorem 30. Darüber hinaus werden Zusammenhänge mit anderen topologischen Konzepten wie etwa Dimension, Ljusternik-Schnirelmann-Kategorie sowie mit Homotopie- und (Ko-)Homologietheorie dargestellt. Auf solche Zusammenhänge wird zum Teil auch in dieser Arbeit eingegangen (vgl. (2.4), (7.7), (8.1), (8.29)), insbesondere interessiert hier der Zusammenhang zwischen dem Geschlecht eines Raumes bzgl. einer freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktion und Homologie- und Kohomologietheorie. Beziehungen zwischen (Ko-)Homologie und Geschlecht eines Raumes werden in [24] besonders prägnant und übersichtlich mit Hilfe der Begriffe "homologisches Geschlecht" ([24], Definition 12 und 16) und "schwaches homologisches Geschlecht" ([24], Definition 17, vgl. hierzu auch (8.8)) beschrieben. Dem schwachen homologischen Geschlecht von Švarc entsprechen der "Yang-Index" [26] und der "mod p Smith Index" in [16], welcher auch in [4] und [5] eine wichtige Rolle spielt. Um die Vielfalt von Anwendungsbereichen der topologischen Konzepte "Geschlecht" oder "Index" anzudeuten, sei noch auf den mit dem Yang-Index eng verwandten "Index" in [9*] hingewiesen. Dort wird mit Hilfe dieses Index ein Verzweigungssatz bewiesen.

Im Zusammenhang mit Untersuchungen zu asymptotischen Fixpunktsätzen sind in [22] die Methoden von Švarc wiederaufge-

griffen und zum Teil etwas ausgebaut worden. Mittels des Švarcscher Geschlechts werden Verallgemeinerungen der Sätze (2) und (7) für Hausdorff-Räume bzw. kompakte Räume M mit freien Z_p -Aktionen formuliert und bewiesen (vgl. [22], Satz 8, 9, 10, 11).

Die Resultate von Švarc und Steinlein zeigen, daß die Theorie des Geschlechts eines Raumes bzgl. einer freien Z_p -Aktion einen sehr angemessenen Rahmen für Resultate vom Typ des Borsuk-Ulamschen Satzes bildet. Dies wird auch durch die hier erzielten Verallgemeinerungen dieses Satzes bestätigt. Das Konzept des Geschlechts eines Raumes im Sinne von Švarc ermöglicht einen sehr allgemeinen und elementaren Rahmen für Sätze vom Borsuk-Ulam Typ. Die in [24], [22] und hier (Satz (5.1), (5.2)) erhaltenen abstrakten Borsuk-Ulam Sätze - abstrakt bzgl. der Räume M - lassen sich mit elementaren Mitteln der mengentheoretischen Topologie beweisen. Will man diese abstrakten Sätze auf konkrete Räume M anwenden, so muß man das Geschlecht dieser Räume berechnen - was im allgemeinen schwierig sein wird - oder zumindest (nach unten) abschätzen. Solche Abschätzungen kann man aufgrund von Zusammenhangseigenschaften oder homologischen Eigenschaften von M gewinnen. (Bzgl. entsprechender Aussagen und Literaturverweise siehe (7.7), (8.1), (8.29).) Diese Tatsache verwenden wir dazu, um einzelne Resultate von Cohen, Connett, Lusk und Munkholm aus den hier erzielten abstrakten Borsuk-Ulam Sätzen ((5.1), (5.2) bzw. (5.4), (5.5)) herzuleiten, und somit in den Rahmen der Theorie des Geschlechts eines Raumes einzuordnen (vgl. IV, 9). Dabei konnten zum Teil sogar Verallgemeinerungen bzw. Verschärfungen dieser Resultate erreicht werden.

Eines der Hauptziele der vorliegenden Arbeit ist der Beweis der folgenden Sätze (5.1a), (5.2a). (5.1a) ist eine direkte Verallgemeinerung von Resultaten von Švarc und Steinlein, mit Hilfe von (5.2a) lassen sich die gerade erwähnten teilweisen Verschärfungen von Ergebnissen von Cohen, Connett, Lusk erzielen.

(5.1a) Es sei M ein Hausdorff-Raum, $m \in \mathbb{N}$, p prim, $f : M \rightarrow M$ freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M , $h : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, $q \in \{2, \dots, p\}$. $g'(M, f)$ sei definiert (vgl. (1.5), (1.7)) und es gelte

(A₁) $g'(M, f) > (m-1)(p-1)+q-1$.

Dann gibt es ein $x \in M$ und $i_1, \dots, i_q \in \{0, \dots, p-1\}$, $i_1 < \dots < i_q$, mit $h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x)) = \dots = h(f^{i_q}(x))$.

Für $q=p$ wurde (5.1a) schon von Švarc und Steinlein bewiesen. (5.1a) gibt eine Antwort auf Frage (a'). Im Fall $q=2$ läßt sich (5.1a) verschärfen, so daß man ein Resultat im Sinne von Frage (a) erhält:

(5.2a) Es seien M, m, p, f, h wie in (5.1a). Es seien $i_1, i_2 \in \{0, \dots, p-1\}$. $g'(M, f)$ sei definiert und es gelte

(A₂) $g'(M, f) > (m-1)(p-1)+1$.

Dann gibt es ein $x \in M$ mit $h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x))$.

Aus den Resultaten von Krasnosel'skiĭ [15] folgt, daß für jede Primzahl p und jede freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f auf S^n $g'(S^n, f) = n+1$ ist (siehe hierzu (2.6)). Damit erhält man den ursprünglichen Satz von Borsuk-Ulam aus (5.1a) bzw. (5.2a) mit $M = S^n$, $p=2$, $f = -\text{id}_{S^n}$, $i_1=0$, $i_2=1$.

Naheliegend zu (5.1a), (5.2a) ist die Frage, ob sich die Existenzaussagen in (5.1a), (5.2a) auch mit schwächeren Abschätzungen als (A₁), (A₂) erzielen lassen. Auf diese Frage nach der Optimalität von (A₁), (A₂) und auf die hierzu erhaltenen Resultate soll weiter unten eingegangen werden.

Genauer enthält die vorliegende Arbeit folgendes:

Im ersten Kapitel führen wir zunächst das Geschlecht $g'(M, f)$ und $g(M, f)$ eines Hausdorff-Raumes M bzgl. einer freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f ein - für die Zwecke dieser Arbeit erweist es sich als günstig, zwei verschiedene Begriffe des Geschlechts zur Verfügung zu haben - und zeigen, daß für normale Räume M $g'(M, f)$ stets definiert ist und mit $g(M, f)$ übereinstimmt. Um eine Verbindung zu dem "Geschlecht eines Faser-raumes" von Švarc [24] herzustellen, bringen wir eine Charakterisierung von $g(M, f)$ durch eine Eigenschaft der Überlagerung $M \rightarrow M/\mathbb{Z}_p$ (bzgl. Bezeichnungen vgl. (1.10)). In Abschnitt

I, 2 gehen wir auf die Beziehung zwischen dem Geschlecht $g(M, f)$ eines (Hausdorff-)Raumes M und der Ljusternik-Schnirelmann-Kategorie des Raumes $M/\mathbb{Z}_p$ ein. Insbesondere sind in diesem Zusammenhang die oben erwähnten Resultate von Krasnosel'skiĭ [14] interessant, da sich daraus die Aussage $g'(S^n, f) = n+1$ für jede Primzahl p und für jede freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f auf S^n herleiten läßt. Im dritten Abschnitt von Kapitel I bringen wir noch einige Hilfssätze. Die meisten Definitionen, Aussagen und Hilfssätze von Kapitel I sind ganz oder teilweise in [22, 23, 24] enthalten. Sie werden der Geschlossenheit der Darstellung wegen hier angegeben.

Das Hauptziel des zweiten Kapitels ist der Beweis der abstrakten Borsuk-Ulam Sätze (5.1), (5.2). Ein wesentliches Hilfsmittel hierzu sind gewisse Teilmengen von Räumen $\mathbb{R}^{mp}$ ("Konfigurationsräume") mit speziellen freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen. Die Bestimmung bzw. Abschätzung des Geschlechts dieser Konfigurationsräume bildet die Grundlage für den Beweis der Sätze (5.1), (5.2), die sich dann recht leicht herleiten lassen.

In Kapitel III behandeln wir die oben angeschnittene Frage nach der Optimalität der Abschätzungen (A_1) , (A_2) in (5.1a), (5.2a). Anhand eines Beispiels zeigen wir zunächst, daß schon im Fall $g'(M, f) = (m-1)(p-1)+q-1$ nicht für jedes stetige $h: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ Punkte $x \in M$ und Exponenten $i_1, \dots, i_q \in \{0, \dots, p-1\}$, $i_1 < \dots < i_q$, mit $h(f^{i_1}(x)) = \dots = h(f^{i_q}(x))$ zu existieren brauchen. (A_1) , (A_2) sind also im allgemeinen optimal. Das legt die Frage nahe, ob man mit schwächeren Abschätzungen als (A_1) , (A_2) auskommt, wenn man anstelle von allgemeinen Räumen M spezielle Räume betrachtet. Wir untersuchen diese Frage im Fall $q=2$ für Räume $F_{n,p}$, die mit α -phären eng verwandt sind, und für spezielle freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen $\varphi_{n,p}$ (bzgl. Definitionen vgl. (7.1)). Für das Geschlecht der Räume $F_{n,p}$ bzgl. der $\varphi_{n,p}$ gilt $g'(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) = n$. Genauer untersuchen wir die folgende Frage:

Welches ist der kleinste Wert n_0 , so daß für jedes stetige $h: F_{n_0,p} \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Existenz von Punkten $z \in F_{n_0,p}$ mit $h(z) = h(\varphi_{n_0,p}(z))$ garantiert ist?

Diese Frage verdient besonderes Interesse, da gerade die Räume $F_{n,p}$ ein optimales Ergebnis hinsichtlich der Existenz von Punkten $x \in M$ mit $h(x) = h(f(x))$ liefern, wobei M einen Hausdorffraum, f eine freie Z_p -Aktion auf M und h eine stetige Abbildung von M in R^m bezeichnet. Man kann nämlich zeigen, daß zu jedem M und zu jedem f mit $g'(M,f) < n_0$ ein stetiges $h : M \rightarrow R^m$ mit $h(x) \neq h(f(x))$ für alle $x \in M$ existiert. Leider ist es nicht gelungen, die obige Frage vollständig zu beantworten. Wir konnten hierzu aber Teilresultate erzielen.

Im ersten Teil von Kapitel IV gilt das Hauptinteresse dem Zusammenhang zwischen Homologie und Geschlecht eines Raumes. Das Ziel dieses Abschnitts ist, eine Abschätzung des Geschlechts eines Raumes M nach unten aus homologischen Eigenschaften von M zu gewinnen ((8.1), (8.29)). Zur Herleitung von Satz (8.1) beweisen wir eine Reihe von Aussagen, die zu einem großen Teil algebraischer Natur sind. Den Sätzen (8.1), (8.29) entsprechende Resultate werden schon in [23,24] bewiesen (vgl. Bemerkung (8.3)). Ebenso sind Lemma (8.4) und (8.5) entsprechende Aussagen im wesentlichen in der Literatur zu finden. Zum Beweis dieser Resultate werden tieferliegende Methoden der homologischen Algebra und der algebraischen Topologie verwendet. Demgegenüber wird hier besonderer Wert darauf gelegt, die benötigten Aussagen mit möglichst elementaren Mitteln zu erhalten. Das erscheint angemessen, da die abstrakten Borsuk-Ulam Sätze dieser Arbeit elementar beweisbar sind. Insbesondere umgehen wir den Gebrauch von "Spektralsequenzen", die in [23,24] (und auch in [4,5,16]) als wesentliches Hilfsmittel benutzt werden. Mit Hilfe dieses Konzepts der homologischen Algebra könnte man Lemma (8.4) allerdings eleganter und kürzer beweisen. Eine analoge Bemerkung trifft auch auf den Beweis von Lemma (8.5) zu. Um einen möglichst elementaren Beweis zu erhalten, nehmen wir konsequenterweise eine recht langwierige Rechnung in Kauf, obwohl man das angestrebte Resultat schneller erreichen könnte, wenn man auf Eigenschaften von "Eilenberg-Mac Lane Räumen $K(\pi,1)$ " zurückgreifen würde (vgl. hierzu [21], Corollary 7 auf S. 503). Die zum Beweis von (8.4), (8.5) verwendeten Methoden gehen

im wesentlichen auf Hopf [11] zurück. Die Methoden von Hopf wurden in [11] in anderem Zusammenhang entwickelt und werden hier zum Teil modifiziert und den vorliegenden Gegebenheiten angepaßt.

In Abschnitt IV, 9 schließlich zeigen wir, wie sich einzelne Resultate von Cohen, Connett, Lusk, Munkholm in den Rahmen der Theorie des Geschlechts eines Raumes einordnen lassen, wobei wir, wie schon oben erwähnt, teilweise allgemeinere oder schärfere Versionen dieser Resultate erhalten.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die die Anfertigung dieser Arbeit ermöglichten und unterstützten. Insbesondere danke ich Herrn Dr. R. Steinlein, der die Arbeit anregte, für sein ständiges Interesse und für viele wertvolle Anregungen. Herrn Dr. W. Singhof danke ich für Hinweise, die mir bei den ersten Überlegungen zu Kapitel IV geholfen haben. Nicht zuletzt gilt mein Dank der Studienstiftung des deutschen Volkes, die diese Arbeit durch ein Promotionsstipendium und durch Finanzierung eines Tagungsaufenthaltes großzügig förderte.

Kapitel I

Die meisten Definitionen, Aussagen und Hilfssätze des ersten Kapitels sind ganz oder im wesentlichen in [23], [24] oder [22] enthalten. Um die vorliegende Arbeit in sich abgeschlossen zu machen, erscheint eine Darstellung an dieser Stelle jedoch angebracht.

Der Begriff "Raum" ist stets im Sinne von "topologischer Raum" zu verstehen. p bezeichnet stets eine Primzahl.

1. Das Geschlecht eines topologischen Raumes M bezüglich einer freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M .

(1.1) Definition.

- a) Es sei M ein topologischer Raum, $f : M \rightarrow M$ stetig. f heißt freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M , falls $f^p = \text{id}_M$ und $f(x) \neq x$ für alle $x \in M$ gilt.
- b) Eine Teilmenge A von M mit $f(A) \subset A$ heißt invariant unter f .

(1.2) Bemerkung.

Eine freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f auf M ist insbesondere ein Homöomorphismus von M auf sich mit $f^{-1} = f^{p-1}$.

Wegen p prim folgt aus $f(x) \neq x$ für alle $x \in M$ mit dem Euklidischen Algorithmus auch $f^j(x) \neq x$ für alle $x \in M$ und $j = 1, \dots, p-1$, d.h. die von f erzeugte Gruppe $\mathbb{Z}_p$ operiert fixpunktfrei auf M .

Für eine invariante Teilmenge A von M gilt $A = f^p(A) \subset f^{p-1}(A) \subset \dots \subset f(A) \subset A$, also $f(A) = A$.

Die folgende Definition bezieht sich auf Abbildungen zwischen topologischen Räumen, die mit freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen verträglich sind:

(1.3) Definition.

Es seien M_1, M_2 topologische Räume, f_1, f_2 freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen auf M_1 bzw. M_2 . Eine stetige Abbildung $P: M_1 \rightarrow M_2$ heißt äquivariant, falls das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_2 \\ P \uparrow & & \uparrow P \\ M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_1 \end{array} \quad \text{kommutativ ist.}$$

Als nächstes werden zwei verschiedene Definitionen des Geschlechts eines Raumes bezüglich einer freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktion angegeben. (Bezeichnung: $g'(M, f)$ bzw. $g(M, f)$). Anschließend wird auf Eigenschaften und Beziehungen zueinander eingegangen.

(1.4) Definition (vgl. [24], Chapter I, §1).

Es sei M ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{J} = \{D\}$ von Teilmengen von M heißt zulässige Überdeckung von M , wenn gilt

a) $\mathcal{J}$ ist offene Überdeckung von M .

b) Es gibt eine Familie $\{t_D\}_{D \in \mathcal{J}}$ von stetigen Abbildungen $t_D: M \rightarrow [0, 1]$ mit $t_D|_{M \setminus D} = 0$ für alle $D \in \mathcal{J}$ und zu jedem $x \in M$ gibt es ein $D \in \mathcal{J}$ mit $t_D(x) = 1$.

(1.5) Definition (vgl. [24], Definition 15).

Es sei M ein Hausdorff-Raum und f freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M . Dann sei

$$\mathcal{C}'(M, f) := \left\{ D \subset M \mid \begin{array}{l} \text{Es gibt disjunkte offene Teilmengen} \\ D_0, \dots, D_{p-1} \text{ von } M \text{ mit } \bigcup_{i=0}^{p-1} D_i = D \text{ und} \\ f^i(D_0) = D_i \text{ für } i = 1, \dots, p-1 \end{array} \right\}$$

und

$$g'(M, f) := \min \left\{ \text{card } \mathcal{J} \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{C}'(M, f) \text{ und } \mathcal{J} \text{ ist zulässige Überdeckung von } M \right\}$$

(1.6) Definition (vgl. [23] und [22], Definition 2).

Es sei M ein Hausdorff-Raum und f freie Z_p -Aktion auf M .
Dann sei

$$\mathcal{C}(M, f) := \left\{ G \subset M \left| \begin{array}{l} \text{Es gibt disjunkte abgeschlossene Teil-} \\ \text{mengen } G_0, \dots, G_{p-1} \text{ von } M \text{ mit } \bigcup_{i=0}^{p-1} G_i = G \\ \text{und } f^i(G_0) = G_i \text{ f\"ur } i = 1, \dots, p-1 \end{array} \right. \right\}$$

und

$$g(M, f) := \min \{ \text{card } \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{C}(M, f) \text{ und } \bigcup_{G \in \mathcal{U}} G = M \}.$$

Wir f\"uhren noch folgende Abk\"urzungen ein:

F\"ur $D \in \mathcal{C}'(M, f)$ mit $D = \bigcup_{i=0}^{p-1} D_i$, D_i offen in M , $i = 0, \dots, p-1$,

$D_i \cap D_j = \emptyset$ f\"ur $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$, $i \neq j$, $f^i(D_0) = D_i$ f\"ur

$i = 1, \dots, p-1$, schreiben wir $[D_0, \dots, D_{p-1}] \in Z'(D, f)$.

Entsprechend bedeute $[G_0, \dots, G_{p-1}] \in Z(G, f)$ f\"ur $G \in \mathcal{C}(M, f)$

daß gilt $G = \bigcup_{i=0}^{p-1} G_i$, G_i abgeschlossen in M , $i = 0, \dots, p-1$,

$G_i \cap G_j = \emptyset$ f\"ur $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$, $i \neq j$, $f^i(G_0) = G_i$ f\"ur

$i = 1, \dots, p-1$.

Einige Bemerkungen.

(1.7) F\"ur einen beliebigen Hausdorff-Raum M braucht $g'(M, f)$ nicht zu existieren, denn die Existenz einer zul\"assigen \"Uberdeckung $\mathcal{I}$ von M mit $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}'(M, f)$ ist nicht von vornherein gesichert. Dagegen ist $g(M, f)$ stets wohldefiniert:

F\"ur alle $x \in M$ ist $G_x := \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\} \in \mathcal{C}(M, f)$ und es ist $\bigcup_{x \in M} G_x = M$. Daher existiert $g(M, f)$, denn die Klasse der Kardinalzahlen ist wohlgeordnet.

(1.8) Falls $g'(M, f)$ definiert ist, gilt $g'(M, f) \geq g(M, f)$.

F\"ur normale R\"aume M ist $g'(M, f)$ stets definiert und es gilt sogar $g'(M, f) = g(M, f)$. (Beweis auf Seite 13)

(1.9) F\"ur kompaktes M ist $g'(M, f) = g(M, f) < \infty$. Dies folgt unmittelbar aus Hilfssatz (3.2) (S. 19). (Vgl. [24], Proposition 8)

(1.10) In [24] wird der allgemeinere Begriff des Geschlechts eines Faserraumes eingeführt. Definition (1.5) entspricht dem Spezialfall der Überlagerung $P : M \rightarrow M/\mathbb{Z}_p$, wobei $M/\mathbb{Z}_p$ der durch die Identifikation jeweils der Punkte $x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)$ aus M entstehende topologische Raum und P die kanonische Projektion sei.

(1.11) Es soll noch eine Charakterisierung der Zahlen $g(M, f)$ durch Eigenschaften der Überlagerung $P : M \rightarrow M/\mathbb{Z}_p$ angegeben werden (vgl. [24] und [13], §8, Definition 5): Es sei $A \subset M/\mathbb{Z}_p$ und $i_A : A \hookrightarrow M/\mathbb{Z}_p$. Eine stetige Abbildung $s_A : A \rightarrow M$ mit $P \circ s_A = i_A$ heißt Schnitt auf A . Damit gilt:

$$g(M, f) = \min \left\{ \text{card } \mathcal{U} \mid \begin{array}{l} \mathcal{U} \subset 2^{M/\mathbb{Z}_p} \text{ ist abgeschlossene Über-} \\ \text{deckung von } M/\mathbb{Z}_p \text{ und für alle } A \in \mathcal{U} \\ \text{existiert ein Schnitt } s_A : A \rightarrow M \text{ auf } A \end{array} \right\}$$

(Beweis auf Seite 14)

(1.12) Es wurden aus folgendem Grund zwei verschiedene Begriffe des Geschlechts eines Raumes bezüglich einer freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktion eingeführt: Wegen $g'(M, f) \geq g(M, f)$ sind die abstrakten Borsuk-Ulam-Sätze in II, 5 schärfer als entsprechende Versionen dieser Sätze mit $g(M, f)$ anstelle von $g'(M, f)$. Bei Satz (7.4) (Seite 40), der für die Optimalitätsfrage in II, 7 und für den Zusammenhang zwischen Homologie und Geschlecht eines Raumes (vgl. IV, 8) eine Rolle spielt, müßte man zusätzlich die Normalität des Raumes M voraussetzen, wenn man $g'(M, f)$ durch $g(M, f)$ ersetzen würde. (Vgl. hierzu auch [22], Satz 2) Andererseits werden im folgenden die Räume, deren Geschlecht wir bestimmen oder abschätzen müssen, fast immer normale Räume sein, so daß wir dann wegen $g'(M, f) = g(M, f)$ bequemer mit $g(M, f)$ als mit $g'(M, f)$ rechnen können. Insbesondere erweist sich dies bei der Bestimmung des Geschlechts von Konfigurationsräumen (vgl. II, 4) als Vorteil.

Beweis von (1.8).

$g'(M, f)$ sei definiert. Es sei $\mathcal{S} = \{D\}$ zulässige Überdeckung von M mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}(M, f)$ und $\text{card } \mathcal{S} = g'(M, f)$. Ferner sei $\{t_D\}_{D \in \mathcal{S}}$ eine Familie von stetigen Abbildungen $t_D : M \rightarrow [0, 1]$ gemäß (1.4b). Es sei $D \in \mathcal{S}$ mit $[D_0, \dots, D_{p-1}] \in Z'(D, f)$. Wir setzen $A_D := \bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(t_D^{-1}(\{1\}))$, $G_{D,i} := A_D \cap D_i$ für $i = 0, \dots, p-1$, sowie $G_D := \bigcup_{i=0}^{p-1} G_{D,i}$. A_D ist abgeschlossen (f ist Homöomorphismus). Wegen $A_D \subset \bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(D) = D$ ist $M \setminus G_{D,i} = (M \setminus A_D) \cup (D \setminus D_i) = (M \setminus A_D) \cup \bigcup_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{p-1} D_k$, und folglich ist $G_{D,i}$ abgeschlossen für $i = 0, \dots, p-1$. Aus der Injektivität von f^1 und wegen $f(A_D) = A_D$ folgt $f^1(G_{D,0}) = f^1(A_D \cap D_0) = f^1(A_D) \cap f^1(D_0) = A_D \cap D_1 = G_{D,1}$ für $i = 1, \dots, p-1$. Zudem gilt für $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$, $i \neq j$, $G_{D,i} \cap G_{D,j} \subset D_i \cap D_j = \emptyset$. Somit ist $G_D \in \mathcal{C}(M, f)$ mit $[G_{D,0}, \dots, G_{D,p-1}] \in Z(G_D, f)$. Aus $G_D = \bigcup_{i=0}^{p-1} (A_D \cap D_i) = A_D \cap (\bigcup_{i=0}^{p-1} D_i) = A_D \cap D = A_D \supset t_D^{-1}(\{1\})$ und aus $\bigcup_{D \in \mathcal{S}} t_D^{-1}(\{1\}) = M$ folgt $\bigcup_{D \in \mathcal{S}} G_D = M$, und somit ist $g(M, f) \leq \text{card } \{G_D \mid D \in \mathcal{S}\} \leq \text{card } \mathcal{S} = g'(M, f)$.

Es sei nun M ein normaler Raum. Es sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}(M, f)$ mit $\bigcup_{G \in \mathcal{U}} G = M$ und $\text{card } \mathcal{U} = g(M, f)$. Zu $G \in \mathcal{U}$ mit $[G_0, \dots, G_{p-1}] \in Z(G, f)$ wählen wir gemäß Hilfssatz (3.2) (Seite 19) eine offene Umgebung $U_{G,0}$ von G_0 mit $f^1(U_{G,0}) \cap f^j(U_{G,0}) = \emptyset$ für $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$, $i \neq j$. Für $D_{G,i} := f^i(U_{G,0})$, $i = 0, \dots, p-1$, $D_G := \bigcup_{i=0}^{p-1} D_{G,i}$ gilt dann trivialerweise $D_G \in \mathcal{C}(M, f)$ mit $[D_{G,0}, \dots, D_{G,p-1}] \in Z'(D_G, f)$. Wegen $G = \bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(G_0) \subset \bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(U_{G,0}) = D_G$ und $\bigcup_{G \in \mathcal{U}} G = M$ ist $\bigcup_{G \in \mathcal{U}} D_G = M$. Da M normal ist, gibt es zu jedem $G \in \mathcal{U}$ eine stetige Abbildung $t_G : M \rightarrow [0, 1]$ mit $t_G|_G = 1$ und $t_G|_{M \setminus D_G} = 0$. Somit ist $\{D_G\}_{G \in \mathcal{U}}$ eine zulässige Überdeckung von M mit

$\{D_G^1 \mid G \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{C}^1(M, f)$. Daraus folgt die Existenz von $g'(M, f)$ und die Ungleichung $g'(M, f) = \text{card}\{D_G^1 \mid G \in \mathcal{U}\} \leq \text{card } \mathcal{U} = g(M, f)$.

Beweis von (1.11).

Es sei

$$c := \min \left\{ \text{card } \mathcal{U} \mid \begin{array}{l} \mathcal{U} \subset 2^{M/\mathbb{Z}_p} \text{ ist abgeschlossene Überdeckung} \\ \text{von } M/\mathbb{Z}_p \text{ und für alle } A \in \mathcal{U} \text{ existiert} \\ \text{ein Schnitt } s_A : A \rightarrow M \text{ auf } A \end{array} \right\}$$

Es sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}(M, f)$ mit $\bigcup_{G \in \mathcal{U}} G = M$ und $\text{card } \mathcal{U} = g(M, f)$.

Trivialerweise gilt $\bigcup_{G \in \mathcal{U}} P(G) = P(\bigcup_{G \in \mathcal{U}} G) = P(M) = M/\mathbb{Z}_p$.

Wegen $P^{-1}(P(N)) = \bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(N)$ für alle $N \subset M$ ist P abgeschlossen, insbesondere ist also $P(G)$ für alle $G \in \mathcal{U}$ abgeschlossen.

Für $G \in \mathcal{U}$ sei $[G_0, \dots, G_{p-1}] \in Z(G, f)$. Dann ist

$$P(G) = P\left(\bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(G_0)\right) = \bigcup_{i=0}^{p-1} P(f^i(G_0)) = \bigcup_{i=0}^{p-1} P(G_0) = P(G_0),$$

$P_G := P|_{G_0} : G_0 \rightarrow P(G)$ ist bijektiv, stetig und abgeschlossen, also ein Homöomorphismus, und $s_G := i_{G_0} \circ P_G^{-1} : P(G) \rightarrow M$ (mit $i_{G_0} : G_0 \rightarrow M$) ist Schnitt auf $P(G)$. Folglich gilt

$$c \leq \text{card}\{P(G) \mid G \in \mathcal{U}\} \leq \text{card } \mathcal{U} = g(M, f).$$

Es sei nun $\mathcal{U} \subset 2^{M/\mathbb{Z}_p}$ abgeschlossene Überdeckung von $M/\mathbb{Z}_p$ mit $\text{card } \mathcal{U} = c$ und für $A \in \mathcal{U}$ sei $s_A : A \rightarrow M$ Schnitt auf A .

Dann ist $\bigcup_{A \in \mathcal{U}} P^{-1}(A) = P^{-1}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{U}} A\right) = P^{-1}(M/\mathbb{Z}_p) = M$ und wegen

$$P \circ s_A = i_A \text{ ist } P^{-1}(A) = \bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(s_A(A)) \text{ für alle } A \in \mathcal{U}. \text{ Es sei}$$

nun $A \in \mathcal{U}$ und es seien $a, a' \in A$ und $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$.

Falls $a \neq a'$ ist, folgt wegen $P(s_A(a)) = a \neq a' = P(s_A(a'))$

$f^i(s_A(a)) \neq f^j(s_A(a'))$. Im Fall $a = a'$ ist

$f^i(s_A(a)) \neq f^j(s_A(a'))$ für $i \neq j$ (vgl. Bemerkung (1.2)).

Also gilt $f^i(s_A(a)) \neq f^j(s_A(a'))$ für alle $a, a' \in A$ und

$i, j \in \{0, \dots, p-1\}$, $i \neq j$, und somit ist

$f^i(s_A(A)) \cap f^j(s_A(A)) = \emptyset$ für alle $i, j \in \{0, \dots, p-1\}, i \neq j$.
 $s_A(A)$ ist offen in $P^{-1}(A)$: Es sei $x_0 \in s_A(A)$, $x_0 = s_A(a_0)$ mit $a_0 \in A$. Es gibt eine offene Umgebung U von x_0 mit $U \cap f^i(U) = \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, p-1$, und zu U gibt es eine offene Umgebung V von a_0 mit $s_A(V \cap A) \subset U$. Dann gilt wegen
 $P(s_A(V \cap A)) = V \cap A$ $s_A(V \cap A) \subset P^{-1}(V \cap A) \cap U =$
 $= P^{-1}(P(s_A(V \cap A))) \cap U = (\bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(s_A(V \cap A))) \cap U =$
 $= (s_A(V \cap A) \cap U) \cup \bigcup_{i=1}^{p-1} (f^i(s_A(V \cap A)) \cap U) \subset$
 $\subset s_A(V \cap A) \cup \bigcup_{i=1}^{p-1} (f^i(U) \cap U) = s_A(V \cap A)$, also
 $s_A(V \cap A) = P^{-1}(V \cap A) \cap U = P^{-1}(V) \cap U \cap P^{-1}(A)$, folglich ist
 $s_A(V \cap A)$ offene Umgebung in $P^{-1}(A)$ von x_0 , und somit ist
 $s_A(A)$ offen in $P^{-1}(A)$.

Da f Homöomorphismus ist und wegen $f(P^{-1}(A)) = P^{-1}(A)$ sind auch die Mengen $f^i(s_A(A))$ offen in $P^{-1}(A)$, $i = 1, \dots, p-1$, und daher ist $s_A(A) = P^{-1}(A) \setminus (\bigcup_{i=1}^{p-1} f^i(s_A(A)))$ abgeschlossen in $P^{-1}(A)$. Wegen $P^{-1}(A)$ abgeschlossen in M ist $s_A(A)$ sogar abgeschlossen in M , und damit ist auch $f^i(s_A(A))$ abgeschlossen in M , $i = 1, \dots, p-1$. Folglich ist $P^{-1}(A) \in \mathcal{Q}(M, f)$ mit $[s_A(A), f(s_A(A)), \dots, f^{p-1}(s_A(A))] \in Z(P^{-1}(A), f)$ und wir erhalten $g(M, f) \leq \text{card} \{P^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{U}\} \leq \text{card} \mathcal{U} = c$.

2. Geschlecht eines Raumes und Ljusternik-Schnirelmann-Kategorie. Ein Satz von Krasnosel'skii.

In diesem Abschnitt werden wir zunächst auf die Beziehung zwischen $g(M, f)$ und der Ljusternik-Schnirelmann-Kategorie $\text{cat}(\frac{M}{\mathbb{Z}_p})$ eingehen ($\frac{M}{\mathbb{Z}_p}$ wie in (1.10)). Mit Hilfe eines Satzes von Krasnosel'skii erhalten wir dann für das Geschlecht von Sphären S^n mit freier $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f $g(S^n, f) = n+1$. Die Abschätzung $g(S^n, f) \geq n+1$ verwenden wir

für die Optimalitätsaussage in III, 6 (vgl. Lemma (4.4), Seite 27, Lemma (4.6), Seite 28, Beispiel (6.1), Seite 37) und sie ist zudem von Bedeutung für die Bestimmung des Geschlechts $g(F_{n,p}, \varphi_{n,p})$ der Räume $F_{n,p}$, die in III, 7 eingeführt werden. (Vgl. hierzu auch [22], Hilfssatz 12.) Diese Abschätzung kann man auch ohne Zuhilfenahme des Krasnosel'skiischen Resultats herleiten: Wegen $S^0 \neq \emptyset$ ist trivialerweise $g(S^0, f) \geq 1$, da S^1 zusammenhängend ist, folgt $g(S^1, f) \geq 2$, für $n \geq 2$ erhält man $g(S^n, f) \geq n+1$ aus Satz (5.1) Seite 56.

(2.1) Definition (vgl. [17])

Es sei X ein Hausdorff-Raum. Dann sei

$$\text{cat } X := \min \left\{ \text{card } \mathcal{U} \left| \begin{array}{l} \mathcal{U} \subset 2^X \text{ ist abgeschlossene Überdeckung} \\ \text{von } X \text{ und für alle } A \in \mathcal{U} \text{ ist } A \\ \text{zusammenziehbar in } X. \end{array} \right. \right\}$$

(2.2) Bemerkung.

Für Hausdorff-Räume X ist trivialerweise $\text{cat } X$ stets wohldefiniert.

(2.3) Bemerkung.

Für einen Hausdorff-Raum M mit freier $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f auf M ist auch $M/\mathbb{Z}_p$ Hausdorff-Raum. (Diese Aussage benötigen wir auch noch später in IV, 3.) Insbesondere ist also $\text{cat } (M/\mathbb{Z}_p)$ wohldefiniert.

Begründung zu (2.3):

Es sei $P: M \rightarrow M/\mathbb{Z}_p$ die kanonische Projektion und es seien $\bar{x}, \bar{y} \in M/\mathbb{Z}_p$ mit $\bar{x} \neq \bar{y}$. Wir wählen $x, y \in M$ mit $P(x) = \bar{x}$ bzw. $P(y) = \bar{y}$. Dann ist $f^i(x) \neq f^j(y)$ für alle $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$, und da M Hausdorff-Raum ist, gibt es eine offene Umgebung U von x und eine offene Umgebung V von y mit $f^i(U) \cap f^j(V) = \emptyset$

für alle $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$. Wegen $P^{-1}(P(N)) = \bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(N)$ für alle $N \subset M$ ist $P(U)$ (bzw. $P(V)$) offene Umgebung von $P(x) = \bar{x}$ (bzw. $P(y) = \bar{y}$) und es gilt $P^{-1}(P(U) \cap P(V)) =$
 $= P^{-1}(P(U)) \cap P^{-1}(P(V)) = (\bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(U)) \cap (\bigcup_{j=0}^{p-1} f^j(V)) =$
 $= \bigcup_{i,j=0}^{p-1} (f^i(U) \cap f^j(V)) = \emptyset$. Daraus folgt wegen der Surjektivität von P $P(U) \cap P(V) = \emptyset$.

Damit ist folgende Aussage sinnvoll:

(2.4) (vgl. [22], Seite 26/27, und [24], Theorem 18).

Es sei M ein Hausdorff-Raum und f freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M .

Dann ist $g(M, f) \leq \text{cat} (M/\mathbb{Z}_p)$. Für zusammenziehbares M gilt sogar $g(M, f) = \text{cat} (M/\mathbb{Z}_p)$.

Beweis.

In [22], Seite 26/27, wurde $g(M, f) \leq \text{cat} (M/\mathbb{Z}_p)$ für den Fall $M = S^n$ gezeigt. Der dort angegebene Beweis läßt sich unmittelbar auf beliebige Hausdorff-Räume M übertragen.

Es sei nun M zusammenziehbar. Es sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}(M, f)$ mit $\bigcup_{G \in \mathcal{U}} G = M$ und $\text{card } \mathcal{U} = g(M, f)$. Dann ist $\bigcup_{G \in \mathcal{U}} P(G) = M/\mathbb{Z}_p$, für $G \in \mathcal{U}$ mit $[G_0, \dots, G_{p-1}] \in Z(G, f)$ ist $P(G)$ abgeschlossen, und $P_G := P|_{G_0} : G_0 \rightarrow P(G)$ ist ein Homöomorphismus (vgl. Beweis von (1.11)). Es sei $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ stetig mit $H(., 0) = \text{id}_M$ und $H(., 1) = \text{const} = x_0 \in M$. Die Mengen $P(G)$ lassen sich vermöge $H_G : P(G) \times [0, 1] \rightarrow M/\mathbb{Z}_p$
 $H_G(b, t) := P(H(P_G^{-1}(b), t))$ in $M/\mathbb{Z}_p$ auf den Punkt $P(x_0)$ zusammenziehen. Somit gilt
 $\text{cat} (M/\mathbb{Z}_p) \leq \text{card} \{P(G) \mid G \in \mathcal{U}\} \leq \text{card } \mathcal{U} = g(M, f)$.

Krasnosel'skiĭ [15] betrachtete stetige Abbildungen $f: S^n \rightarrow S^n$ mit $f^j(x) \neq x$ für $j = 1, \dots, m-1$ und alle $x \in S^n$ und $f^m = \text{id}_{S^n}$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \neq 2$, m nicht notwendig prim). Er nannte abgeschlossene Mengen $G \subset S^n$ "Mengen erster Art", falls $f(G) = G$ ist und für alle Zusammenhangskomponenten G_0 von G und für alle $x \in S^n$ $\text{card}(G_0 \cap \{x, \dots, f^{m-1}(x)\}) \leq 1$ gilt.

In [15] wird folgendes Resultat bewiesen:

(2.5) Satz von Krasnosel'skiĭ.

a) Es seien $F_1, \dots, F_r \subset S^n$ Mengen erster Art mit $\bigcup_{i=1}^r F_i = S^n$.

Dann ist $r \geq n+1$.

b) $\text{cat}(S^n/\mathbb{Z}_m) = n+1$.

Aus (2.5) folgt trivialerweise

(2.6) Es sei f freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf S^n . Dann ist $g(S^n, f) = n+1$.

Zu (2.6): $g(S^n, f) \geq n+1$ folgt aus (2.5a), denn Mengen $G \in \mathcal{C}(M, f)$ sind offensichtlich Mengen erster Art. Aus (2.5b) erhalten wir zusammen mit (2.4) $g(S^n, f) \leq n+1$.

3. Einige Hilfssätze.

Die folgenden Aussagen sind zum Teil sehr elementar. Sie werden im folgenden mehrfach gebraucht.

(3.2) ist lediglich eine Umformulierung von Hilfssatz 8 in [22] und dient dazu, Mengen aus $\mathcal{C}(M, f)$ in geeigneter Weise zu vergrößern.

Vermöge (3.3) werden wir bei der Bestimmung des Geschlechts normaler Räume M oft so vorgehen, daß wir zunächst M passend aufteilen und dann $g(M, f)$ durch die Summe der Geschlechter der einzelnen Teile abschätzen.

(3.4) ist im wesentlichen Hilfssatz 10 von [22] und liefert Abschätzungen für das Geschlecht von Räumen, zwischen denen äquivariante Abbildungen existieren.

(3.5) wird direkt von [22] übernommen. (3.5) liefert ein Kriterium dafür, wann das Geschlecht kompakter Räume gleich 1 ist.

(3.1) Hilfssatz.

Es sei M ein diskreter Raum und es sei f freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M . Dann ist $g(M, f) \leq 1$.

Beweis.

Für $x, y \in M$ sei $x \sim y : \Leftrightarrow$ es gibt $j \in \{0, \dots, p-1\}$ mit $f^j(x) = y$.
 $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf M . Aus jeder Äquivalenzklasse $[x] = \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ ($x \in M$) wählen wir einen Repräsentanten r_x aus und erhalten ein vollständiges Repräsentantensystem $R := \{r_x \mid x \in M\} \subset M$, d.h. es gilt $M = \bigcup_{r \in R} [r]$ und für $r, r' \in R$, $r \neq r'$ ist $r \nmid r'$. Wir setzen $M_i := f^i(R)$ für $i = 0, \dots, p-1$. Die M_i sind trivialerweise abgeschlossen und es gilt $\bigcup_{i=0}^{p-1} M_i = \bigcup_{i=0}^{p-1} \{f^i(r) \mid r \in R\} = \bigcup_{r \in R} \{f^i(r) \mid i=0, \dots, p-1\} = \bigcup_{r \in R} [r] = M$. Für $r \in R$, $k \in \{1, \dots, p-1\}$ ist $f^k(r) \neq r$ (vgl. (1.2)) und für $r' \in R$, $r' \neq r$ ist $f^k(r) \sim r \nmid r'$ und daher insbesondere $f^k(r) \neq r'$. Also gilt $f^k(r) \neq r'$ für alle $r, r' \in R$, und folglich ist $f^k(M_0) \cap M_0 = f^k(R) \cap R = \emptyset$. Für $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$, $i \neq j$, gilt somit (o.B.d.A.: $i > j$) wegen der Injektivität von f^j $M_i \cap M_j = f^i(M_0) \cap f^j(M_0) = f^j(f^{i-j}(M_0) \cap M_0) = f^j(\emptyset) = \emptyset$. Also ist $M \in \mathcal{C}(M, f)$ mit $[M_0, \dots, M_{p-1}] \in Z(M, f)$.

(3.2) Hilfssatz (vgl. [22], Hilfssatz 8).

Es sei M ein normaler Raum, f freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M , $G \in \mathcal{C}(M, f)$. Dann gilt:

a) Zu $[G_0, \dots, G_{p-1}] \in Z(G, f)$ gibt es eine offene Umgebung U_0 von G_0 mit $f^i(\bar{U}_0) \cap f^j(\bar{U}_0) = \emptyset$ für alle $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$, $i \neq j$.

b) Es gibt eine offene Umgebung W von G mit $f(W) = W$ und $\bar{W} \in \mathcal{C}(M, f)$.

Beweis.

a) Nach [22], Hilfssatz 8, gibt es eine abgeschlossene Umgebung N von G_0 mit $f^i(N) \cap N = \emptyset$ für $i = 1, \dots, p-1$. Dann ist auch $f^i(N) \cap f^j(N) = \emptyset$ für alle $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$, $i \neq j$, und (3.2a) ist erfüllt für jedes offene U_0 mit $G_0 \subset U_0 \subset N$.

b) Es sei $[G_0, \dots, G_{p-1}] \in \mathcal{Z}(G, f)$ und U_0 gemäß a) gewählt. $W := \bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(U_0)$ ist offen, und es gilt $G \subset W = f(W)$. Wegen a) und wegen $\bar{W} = \bigcup_{i=0}^{p-1} \overline{f^i(U_0)} = \bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(\bar{U}_0)$ (f ist Homöomorphismus) ist $\bar{W} \in \mathcal{C}(M, f)$.

(3.3) Hilfssatz (vgl. [24], Proposition 5 und [22], Seite 54).

Es sei M ein normaler Raum, f freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M . Es seien $A_1, \dots, A_n \subset M$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $f(A_i) \subset A_i$ für $i = 1, \dots, n$, und $\bigcup_{i=1}^n A_i = M$, und es sei $\bigcap_{i=1}^k A_i$ abgeschlossen in M für alle $k = 1, \dots, n$. Es gelte $g(A_i, f) < \infty$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann ist $g(M, f) \leq \sum_{i=1}^n g(A_i, f)$.

Beweis.

Induktion nach n .

a) $n = 2$. Es sei $s_1 := g(A_1, f)$, $i = 1, 2$. Es seien

$R_1, \dots, R_{s_1} \in \mathcal{C}(A_1, f)$, $H_1, \dots, H_{s_2} \in \mathcal{C}(A_2, f)$ mit $\bigcup_{i=1}^{s_1} R_i = A_1$, $\bigcup_{i=1}^{s_2} H_i = A_2$. Wegen A_1 abgeschlossen in M ist $R_i \in \mathcal{C}(M, f)$, $i = 1, \dots, s_1$. Nach (3.2b) gibt es offene Mengen

$W_1, \dots, W_{s_1} \in M$ mit $R_i \subset W_i = f(W_i)$ und $\bar{W}_i \in \mathcal{C}(M, f)$,

$i = 1, \dots, s_1$. Sei $M_2 := M \setminus \bigcup_{j=1}^{s_1} W_j$, $G_i := H_i \cap M_2$, $i = 1, \dots, s_2$.

Dann ist $M_2 \subset M \setminus A_1 \subset A_2$, $\bigcup_{i=1}^{s_2} G_i = (\bigcup_{i=1}^{s_2} H_i) \cap M_2 = A_2 \cap M_2 = M_2$, wegen $H_i \in \mathcal{C}(A_2, f)$ und $f(M_2) = M_2$ ist $G_i \in \mathcal{C}(M_2, f)$ und

wegen der Abgeschlossenheit von M_2 gilt sogar $G_1 \in \mathcal{C}(M, f)$,
 $i = 1, \dots, s_2$. Zudem gilt $M = (\bigcup_{j=1}^{s_1} W_j) \cup M_2 \subset (\bigcup_{j=1}^{s_1} \overline{W_j}) \cup (\bigcup_{i=1}^{s_2} G_i) \subset M$,
also $M = (\bigcup_{j=1}^{s_1} \overline{W_j}) \cup (\bigcup_{i=1}^{s_2} G_i)$, und folglich ist
 $g(M, f) \leq s_1 + s_2 = g(A_1, f) + g(A_2, f)$.

b) Es sei $n \geq 2$. Wir nehmen an, (3.3) sei für alle $r \leq n$ be-
wiesen. Es seien nun $A_1, \dots, A_{n+1} \subset M$ mit $f(A_i) \subset A_i$,

$i = 1, \dots, n+1$, $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = M$, $\bigcup_{i=1}^k A_i$ sei abgeschlossen in M für
alle $k = 1, \dots, n+1$ und es sei $g(A_i, f) < \infty$, $i = 1, \dots, n+1$.

Dann ist $N := \bigcup_{i=1}^n A_i$ normaler Raum, es gilt $f(N) \subset N$, und $\bigcup_{i=1}^k A_i$
ist trivialerweise abgeschlossen in N für alle $k = 1, \dots, n$,
und daher gilt nach Induktionsannahme $g(N, f) \leq \sum_{i=1}^n g(A_i, f) < \infty$,
woraus wieder nach Induktionsannahme

$g(M, f) \leq g(N, f) + g(A_{n+1}, f) \leq \sum_{i=1}^{n+1} g(A_i, f)$ folgt.

(3.4) Hilfssatz (vgl. [24], Proposition [23], und [22], Hilfssatz 10)

Es seien M_1, M_2 Hausdorff-Räume, es sei f_i freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion
auf M_i ($i = 1, 2$) und es sei $P : M_1 \rightarrow M_2$ äquivalent. Dann
ist $g(M_1, f_1) \leq g(M_2, f_2)$. Falls $g'(M_2, f_2)$ existiert, so
existiert auch $g'(M_1, f_1)$, und es gilt $g'(M_1, f_1) \leq g'(M_2, f_2)$.
Insbesondere existiert für normales M_2 $g'(M_1, f_1)$, und es
gilt $g(M_1, f_1) \leq g'(M_1, f_1) \leq g'(M_2, f_2) = g(M_2, f_2)$.

Beweis.

Die Ungleichung $g(M_1, f_1) \leq g(M_2, f_2)$ ist gerade eine der Aus-
sagen von Hilfssatz 10 in [22].

Es existiere nun $g'(M_2, f_2)$ und $\mathcal{J} \subset \mathcal{C}'(M_2, f_2)$ zusammen mit
einer Familie von Funktionen $\{t_D\}_{D \in \mathcal{J}}$ sei eine zulässige
Überdeckung von M_2 im Sinne von (1.4). Dann ist offensicht-
lich $\{P^{-1}(D)\}_{D \in \mathcal{J}}$ zusammen mit $\{t_D \circ P\}_{D \in \mathcal{J}}$ eine zulässige

Überdeckung von M_1 . In [22], Hilfssatz 10, wird gezeigt, daß für $G \in \mathcal{C}(M_2, f_2)$ mit $[G_0, \dots, G_{p-1}] \in Z(G, f_2)$ $P^{-1}(G) \in \mathcal{C}(M_1, f_1)$ mit $[P^{-1}(G_0), \dots, P^{-1}(G_{p-1})] \in Z(P^{-1}(G), f_1)$ ist. Völlig analog erhält man für $D \in \mathcal{C}'(M_2, f_2)$ mit $[D_0, \dots, D_{p-1}] \in Z'(D, f_2)$; $P^{-1}(D) \in \mathcal{C}'(M_1, f_1)$ mit $[P^{-1}(D_0), \dots, P^{-1}(D_{p-1})] \in Z'(P^{-1}(D), f_1)$. Folglich existiert $g'(M_1, f_1)$ und es gilt $g'(M_1, f_1) \leq g'(M_2, f_2)$. Die letzte Aussage von (3.4) ergibt sich aus (1.8).

(3.5) Hilfssatz (vgl. [22], Hilfssatz 9).

Es sei M ein kompakter Raum, f freie Z_p -Aktion auf M . Dann ist $M \in \mathcal{C}(M, f)$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ die Punkte x und $f(x)$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von M liegen.

Beweis.

[22], Hilfssatz 9.

Kapitel II

In diesem Kapitel werden wir zunächst gewisse Teilmengen des $\mathbb{R}^{mp}$ ($m \in \mathbb{N}$, p prim) ("Konfigurationsräume", vgl. [9]) und spezielle freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen auf diesen Mengen betrachten und das Geschlecht dieser Mengen bezüglich dieser $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen bestimmen bzw. abschätzen. Mit Hilfe des Geschlechts der Konfigurationsräume werden wir dann im zweiten Abschnitt von Kapitel II ohne große Mühe Verallgemeinerungen des Satzes von Borsuk-Ulam erhalten.

4. Konfigurationsräume und ihr Geschlecht.

(4.1) Definition.

Für $m \in \mathbb{N}$, p prim und $q \in \{2, \dots, p\}$ sei

$$R(m, p, q) := \left\{ (x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^m)^p \mid \begin{array}{l} \text{Für alle } i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p\} \\ \text{mit } \text{card}\{i_1, \dots, i_q\} = q \text{ ist} \\ \text{card}\{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\} \geq 2 \end{array} \right\}$$

$$D(m, p, q) := R(m, p, p) \setminus R(m, p, q),$$

$$K(m, p) := \{ (x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^m)^p \mid x_1 \neq x_2, \dots, x_{p-1} \neq x_p, x_p \neq x_1 \},$$

und es sei

$$\varphi_m : R(m, p, q) \rightarrow R(m, p, q), \quad \varphi_m(x_1, \dots, x_p) := (x_2, \dots, x_p, x_1).$$

(4.2) Bemerkung.

Offensichtlich ist φ_m freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf $R(m, p, q)$. Wegen $D(m, p, q) \subset R(m, p, p)$, $\varphi_m(D(m, p, q)) = \varphi_m(R(m, p, p)) \setminus \varphi_m(R(m, p, q)) = R(m, p, p) \setminus R(m, p, q) = D(m, p, q)$, $K(m, p) \subset R(m, p, p)$, $\varphi_m(K(m, p)) \subset K(m, p)$ werden durch φ_m freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen auf $D(m, p, q)$ bzw. $K(m, p)$ induziert, die im folgenden ebenfalls mit φ_m bezeichnet werden.

(4.3) Lemma.

Für alle $m \in \mathbb{N}$, für alle Primzahlen p und für alle $q \in \{2, \dots, p\}$ ist $g(D(m, p, q), \varphi_m) \leq p - q$.

Beweis.

Wegen $D(m, p, p) = \emptyset$ ist die Behauptung für $q = p$ trivialerweise richtig. Im folgenden kann also $2 \leq q < p$ angenommen werden. Der Beweis für $2 \leq q < p$ erfolgt in mehreren Schritten.

a) Für $n = 2, \dots, p - q + 1$ sei

$$D_n := \{(x_1, \dots, x_p) \in D(m, p, q) \mid \text{card}\{x_1, \dots, x_p\} = n\}.$$

D_n ist invariant unter φ_m ($n = 2, \dots, p - q + 1$), es gilt $\bigcup_{n=2}^{p-q+1} D_n = D(m, p, q)$, und für alle $k \in \{2, \dots, p - q + 1\}$ ist $\bigcup_{n=2}^k D_n$ abgeschlossen in $D(m, p, q)$. Wir werden zeigen, daß

$g(D_n, \varphi_m) \leq 1$ ist für alle $n = 2, \dots, p - q + 1$, und erhalten dann nach Hilfssatz (3.3) $g(D(m, p, q), \varphi_m) \leq \sum_{n=2}^{p-q+1} g(D_n, \varphi_m) \leq p - q$.

Es sei nun $n \in \{2, \dots, p - q + 1\}$. Zum Nachweis von $g(D_n, \varphi_m) \leq 1$ werden zunächst diskrete Räume mit freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen eingeführt, in die wir dann die Mengen D_n äquivariant abbilden.

b) Es sei $M_n := \{(a_1, \dots, a_p) \in \{1, \dots, n\}^p \mid \{a_1, \dots, a_p\} = \{1, \dots, n\}\}$. γ_n bezeichne die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, \dots, n\}$. Auf M_n definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$(a_1, \dots, a_p) \sim (b_1, \dots, b_p) : \Leftrightarrow$ Es gibt ein $\pi \in \gamma_n$ mit $a_i = \pi(b_i)$ für alle $i \in \{1, \dots, p\}$. Für $a \in M_n$ bezeichne $[a]$ die Äquivalenzklasse von a bezüglich $\sim$, und es sei $\hat{M}_n := \{[a] \mid a \in M_n\}$.

M_n und $\hat{M}_n$ werden mit der diskreten Topologie versehen. Für $a = (a_1, \dots, a_p) \in M_n$ definieren wir $\varphi(a) := (a_2, \dots, a_p, a_1) \in M_n$ und $\hat{\varphi}([a]) := [\varphi(a)] \in \hat{M}_n$. Die Abbildungen $\varphi: M_n \rightarrow M_n$ und $\hat{\varphi}: \hat{M}_n \rightarrow \hat{M}_n$ sind wohldefiniert, es gilt $\varphi^p = \text{id}_{M_n}$, $\hat{\varphi}^p = \text{id}_{\hat{M}_n}$,

und wegen $n \geq 2$ ist $\varphi(a) \neq a$ für alle $a \in M_n$, d.h. φ ist freie Z_p -Aktion auf M_n . Wir zeigen, daß auch $\hat{\varphi}$ fixpunktfrei ist:

Für $k \in \{1, \dots, p\}$ sei $k^+ \in \{1, \dots, p\}$ bestimmt durch

$k^+ \equiv k+1 \pmod{p}$. Es sei $a = (a_1, \dots, a_p) \in M_n$. Wegen

$\text{card}\{a_1, \dots, a_p\} = n < p$ gibt es $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $i \neq j$, mit

$a_i = a_j$. Da φ freie Z_p -Aktion auf M_n ist, gilt (vgl. (1.2))

$(a_{i^+}, a_{(i^+)^+}, \dots, a_1) = \varphi^1(a) \neq \varphi^j(a) = (a_{j^+}, a_{(j^+)^+}, \dots, a_j)$,

und folglich gibt es $k, l \in \{1, \dots, p\}$ mit $a_k = a_l$ und $a_{k^+} \neq a_{l^+}$.

Aus $a_k = a_l$ und $\varphi(a)_k = a_{k^+} \neq a_{l^+} = \varphi(a)_l$ ($\varphi(a)_r := r$ -te

Komponente von $\varphi(a)$ für $r = 1, \dots, p$) folgt nun

$\hat{\varphi}([a]) = [\varphi(a)] \neq [a]$. Somit ist $\hat{\varphi}$ freie Z_p -Aktion auf $\hat{M}_n$, und wegen Hilfssatz (3.1) gilt $g(\hat{M}_n, \hat{\varphi}) \leq 1$.

c) In diesem Abschnitt konstruieren wir eine Äquivariante

Abbildung $J : D_n \longrightarrow \hat{M}_n$. Nach Hilfssatz (3.4) ist dann

$g(D_n, \varphi_n) \leq g(\hat{M}_n, \hat{\varphi}) \leq 1$.

Für jedes $x = (x_1, \dots, x_p) \in D_n$ sei $N_x : \{x_1, \dots, x_p\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ definiert durch $N_x(x_1) := 1$

$$N_x(x_{i+1}) := \begin{cases} N_x(x_k) & \text{falls } x_{i+1} = x_k \text{ für ein } k \in \{1, \dots, i\} \\ 1 + \max_{1 \leq k \leq i} N_x(x_k) & \text{falls } x_{i+1} \neq x_k \text{ für alle } k \in \{1, \dots, i\} \end{cases}$$

$(1 \leq i < p)$.

Wegen $\{N_x(x_1), \dots, N_x(x_p)\} = \{1, \dots, n\}$ für alle $x = (x_1, \dots, x_p) \in D_n$

wird dann durch $x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto (N_x(x_1), \dots, N_x(x_p))$, $x \in D_n$,

eine Abbildung $N : D_n \longrightarrow M_n$ definiert.

Es sei $P : M_n \longrightarrow \hat{M}_n$, $a \mapsto [a]$, die kanonische Projektion und

schließlich sei $J : D_n \longrightarrow \hat{M}_n$, $J := P \circ N$, also

$J(x) = [(N_x(x_1), \dots, N_x(x_p))]$ für $x = (x_1, \dots, x_p) \in D_n$. Zum Nach-

weis der Stetigkeit von J genügt es, die Stetigkeit von N

zu zeigen, denn P ist trivialerweise stetig.

Sei hierzu $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_p) \in D_n$. Wegen $\hat{x} \in R(m, p, p)$ ist
 $\delta := \frac{1}{2} \min \{ \|\hat{x}_i - \hat{x}_j\| \mid i, j \in \{1, \dots, p\}, \hat{x}_i \neq \hat{x}_j \} > 0$. Wir
 zeigen, daß N auf der offenen Umgebung

$U(\hat{x}) := (K(\hat{x}_1, \delta) \times \dots \times K(\hat{x}_p, \delta)) \cap D_n$ von $\hat{x}$ in D_n konstant
 ist. Sei $x = (x_1, \dots, x_p) \in U(\hat{x})$ und seien $k, l \in \{1, \dots, p\}$.

Dann gilt:

i) Aus $\hat{x}_k \neq \hat{x}_l$ folgt $x_k \neq x_l$. Das gilt wegen

$$\|x_k - x_l\| = \|x_k - \hat{x}_k + \hat{x}_k - \hat{x}_l + \hat{x}_l - x_l\| \geq \|\hat{x}_k - \hat{x}_l\| - \\ - \|x_k - \hat{x}_k\| - \|x_l - \hat{x}_l\| > 2\delta - \delta - \delta = 0.$$

ii) Aus $x_k \neq x_l$ folgt $\hat{x}_k \neq \hat{x}_l$. Wegen $\text{card}\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_p\} = n$

existieren $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, p\}$ mit $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_p\} = \{\hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_n}\}$
 und $\hat{x}_{i_r} \neq \hat{x}_{i_s}$ für alle $r, s \in \{1, \dots, n\}$, $r \neq s$. Dann ist nach
 i) auch $x_{i_r} \neq x_{i_s}$ für alle $r, s \in \{1, \dots, n\}$, $r \neq s$, und daher
 ist wegen $\text{card}\{x_1, \dots, x_p\} = n$ $\{x_1, \dots, x_p\} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$.

Zu k, l gibt es $r, s \in \{1, \dots, n\}$, $r \neq s$, mit $x_k = x_{i_r}$ und
 $x_l = x_{i_s}$ und folglich ist wegen i) auch $\hat{x}_k = \hat{x}_{i_r}$ und
 $\hat{x}_l = \hat{x}_{i_s}$, also gilt $\hat{x}_k = \hat{x}_{i_r} \neq \hat{x}_{i_s} = \hat{x}_l$.

Für alle $k, l \in \{1, \dots, p\}$ gilt daher $x_k = x_l \Leftrightarrow \hat{x}_k = \hat{x}_l$,

woraus $N(x) = N(\hat{x})$ folgt. Damit ist die Stetigkeit von N
 bewiesen.

Zu zeigen ist noch die Äquivarianz von J , d.h. $\hat{\phi} \circ J = J \circ \varphi_m$.

Sei $x = (x_1, \dots, x_p) \in D_n$. Dann ist $J(x) = [(N_x(x_1), \dots, N_x(x_p))]$,

$$\hat{\phi}(J(x)) = [(N_{\hat{x}}(x_2), \dots, N_{\hat{x}}(x_p), N_{\hat{x}}(x_1))], \varphi_m(x) = (x_2, \dots, x_p, x_1)$$

$$\text{und } J(\varphi_m(x)) = [(N_{\varphi_m(x)}(x_2), \dots, N_{\varphi_m(x)}(x_p), N_{\varphi_m(x)}(x_1))].$$

Wegen $N_x(x_i) = N_x(x_j) \Leftrightarrow x_i = x_j \Leftrightarrow N_{\varphi_m(x)}(x_i) = N_{\varphi_m(x)}(x_j)$,
 $i, j \in \{1, \dots, p\}$, wird durch die Zuordnung

$$a_i := N_x(x_i) \mapsto N_{\varphi_m(x)}(x_i) =: b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{eine Abbildung}$$

$$\pi: \{1, \dots, n\} = \{a_1, \dots, a_p\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_p\} = \{1, \dots, n\} \quad \text{definiert,}$$

die injektiv und somit bijektiv ist. Also ist $\pi \in \mathcal{Y}_n$, und es gilt $J(\varphi_m(x)) = [(b_2, \dots, b_p, b_1)] = [(\pi(a_2), \dots, \pi(a_p), \pi(a_1))] = [(a_2, \dots, a_p, a_1)] = \hat{\varphi}(J(x))$.

(4.4) Lemma (vgl. [24], Beweis von Proposition 55').

Für alle $m \in \mathbb{N}$ und für alle Primzahlen p ist

$$g(R(m, p, p), \varphi_m) = m(p-1).$$

Beweis.

Es sei $S(m, p) := \{(y_1, \dots, y_p) \in (R^m)^p \mid \sum_{i=1}^p y_i = 0, \sum_{i=1}^p \|y_i\|^2 = 1\}$.

Dann ist $S(m, p) \subset R(m, p, p)$ und $\varphi_m(S(m, p)) \subset S(m, p)$, d.h.

$\varphi_m|_{S(m, p)}$ ist freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf $S(m, p)$. $S(m, p)$ ist homöomorph zu $S^{m(p-1)-1}$, also gilt nach (2.6) $g(S(m, p), \varphi_m) = m(p-1)$,

und folglich erhalten wir wegen $S(m, p) \subset R(m, p, p)$

$$m(p-1) = g(S(m, p), \varphi_m) \leq g(R(m, p, p), \varphi_m).$$

Andererseits ist $R(m, p, p) = \{(x_1, \dots, x_p) \in (R^m)^p \mid \text{Es gibt ein } j \in \{1, \dots, p-1\} \text{ mit } x_j \neq x_{j+1}\}$ und die Abbildung

$$P : R(m, p, p) \rightarrow S(m, p),$$

$$P(x_1, \dots, x_p) := \frac{(x_1 - x_2, \dots, x_{p-1} - x_p, x_p - x_1)}{(\|x_1 - x_2\|^2 + \dots + \|x_{p-1} - x_p\|^2 + \|x_p - x_1\|^2)^{1/2}} \text{ ist äqui-}$$

variant, woraus nach (3.4)

$$g(R(m, p, p), \varphi_m) \leq g(S(m, p), \varphi_m) = m(p-1) \text{ folgt.}$$

(4.5) Bemerkung.

Die oben verwendete Gleichung $g(S(m, p), \varphi_m) = m(p-1)$ kann auch ohne das Resultat von Krasnosel'skiĭ hergeleitet werden: Wie schon in I, 2 (Seite 15) erwähnt wurde, erhält man für die $(m(p-1)-1)$ -Sphäre $S(m, p)$ die Abschätzung $g(S(m, p), \varphi_m) \geq m(p-1)$ auch ohne den Satz von Krasnosel'skiĭ. Die Ungleichung $g(S(m, p), \varphi_m) \leq m(p-1)$ wird in [22], Seite 55, direkt durch Konstruktion von Mengen

$g(1), \dots, g(m(p-1)) \in \mathcal{G}(S(m,p), \varphi_m)$ mit $\bigcup_{j=1}^{m(p-1)} G(j) = S(m,p)$ bewiesen.

Das folgende Lemma bildet die Grundlage für den Beweis von Satz (5.1), Seite 32, und für Beispiel (6.1), Seite 37.

(4.6) Lemma.

Für alle $m \in \mathbb{N}$, für alle Primzahlen p und für alle $q \in \{2, \dots, p\}$ ist $g(R(m,p,q), \varphi_m) = (m-1)(p-1) + q - 1$.

Beweis.

1) Wir beweisen zunächst $g(R(m,p,q), \varphi_m) \leq (m-1)(p-1) + q - 1$ durch Induktion nach m .

a) $m = 1$. Für $x = (x_1, \dots, x_p) \in R(1,p,q)$ sei

$J(x) := \{i \in \{1, \dots, p\} \mid x_i = \min_{1 \leq j \leq p} x_j\}$, und für $n = 1, \dots, q-1$ sei

$R_n := \{x \in R(1,p,q) \mid \text{card } J(x) = n\}$. Die Mengen R_n sind in-

variant unter φ_1 ($n = 1, \dots, q-1$), es ist $\bigcup_{n=1}^{q-1} R_n = R(1,p,q)$,

und $\bigcup_{j=1}^k R_{q-j}$ ist abgeschlossen in $R(1,p,q)$ für alle

$k \in \{1, \dots, q-1\}$. Wir werden zeigen, daß $g(R_n, \varphi_1) \leq 1$ ist, und erhalten dann mit Hilfssatz (3.3) den Induktionsanfang

$$g(R(1,p,q), \varphi_1) \leq \sum_{j=1}^{q-1} g(R_{q-j}, \varphi_1) \leq q-1.$$

Zum Nachweis von $g(R_n, \varphi_1) \leq 1$ betrachten wir für $n = 1, \dots, q-1$

die Mengen $M_n := \{I \subset \{1, \dots, p\} \mid \text{card } I = n\}$, versehen mit der

diskreten Topologie. Auf M_n definieren wir noch eine freie

$\mathbb{Z}_p$ -Aktion : Für $I \subset \{1, \dots, p\}$ sei $i^- \in \{1, \dots, p\}$ bestimmt

durch $i^- \equiv i-1 \pmod{p}$ und für $I = \{i_1, \dots, i_n\} \in M_n$ sei

$\varphi(I) := \{i_1^-, \dots, i_n^-\}$. Es gilt $\varphi(I) \in M_n$ für alle $I \in M_n$,

$\varphi^p = \text{id}_{M_n}$, und wegen $n < p$ ist zudem $\varphi(I) \neq I$ für alle $I \in M_n$,

d.h. φ ist eine freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M_n .

Durch die Zuordnung $x \mapsto J(x)$ ($x \in R_n$) wird eine Abbildung

$J: R_n \longrightarrow M_n$ definiert. Es gilt $\bigcup_{I \in M_n} J^{-1}(\{I\}) = J^{-1}(M_n) = R_n$,

$J^{-1}(\{I\})$ ist abgeschlossen in R_n , und $J|_{J^{-1}(\{I\})}$ ist tri-
vialerweise stetig für alle $I \in M_n$, und somit ist J stetig.
Offensichtlich ist J zudem äquivariant. Nach Hilfssatz
(3.4) und (3.1) folgt $g(R_n, \varphi_1) \leq g(M_n, \varphi) \leq 1$.

b) Es sei nun $m \geq 2$. Wir nehmen an, daß für $l \in \mathbb{N}$ mit $1 < m$
 $g(R(l, p, q), \varphi_1) \leq (l-1)(p-1)+q-1$ gilt und zeigen

$g(R(m, p, q), \varphi_m) \leq (m-1)(p-1)+q-1$. Es sei $x = (x_1, \dots, x_p) \in R(m, p, q)$.

Die Komponenten von x teilen wir auf in $x_i = (y_i, \tilde{x}_i)$, wo-
bei $y_i \in R$ und $\tilde{x}_i \in R^{m-1}$ sei, $i = 1, \dots, p$. Mit dieser Schreib-
weise setzen wir

$A := \{((y_1, \tilde{x}_1), (y_2, \tilde{x}_2), \dots, (y_p, \tilde{x}_p)) \in R(m, p, q) \mid y_1 = y_2 = \dots = y_p\}$ und

$B := R(m, p, q) \setminus A = \{((y_1, \tilde{x}_1), \dots, (y_p, \tilde{x}_p)) \in R(m, p, q) \mid \text{card}\{y_1, \dots, y_p\} \geq 2\}$.

A und B sind invariant unter φ_m . Wir schätzen das Geschlecht
von A bzw. B ab:

Für $((y_1, \tilde{x}_1), \dots, (y_p, \tilde{x}_p)) \in A$ ist $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p) \in R(m-1, p, q)$.

Durch $((y_1, \tilde{x}_1), \dots, (y_p, \tilde{x}_p)) \mapsto (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p)$ wird eine äqui-
variante Abbildung $A \rightarrow R(m-1, p, q)$ definiert, und folglich
gilt nach Hilfssatz (3.4) und nach Induktionsannahme

$g(A, \varphi_m) \leq g(R(m-1, p, q), \varphi_{m-1}) \leq ((m-1)-1)(p-1)+q-1 =$

$= (m-2)(p-1)+q-1$. Für $((y_1, \tilde{x}_1), \dots, (y_p, \tilde{x}_p)) \in B$ ist

$(y_1, \dots, y_p) \in R(1, p, p)$, und die Abbildung

$((y_1, \tilde{x}_1), \dots, (y_p, \tilde{x}_p)) \mapsto (y_1, \dots, y_p)$, $B \rightarrow R(1, p, p)$, ist äqui-

variant. Aus Hilfssatz (3.4) und aus Lemma (4.4) folgt

daher $g(B, \varphi_m) \leq g(R(1, p, p), \varphi_1) = p-1$. Wegen $R(m, p, q) = A \cup B$

und der Abgeschlossenheit von A in $R(m, p, q)$ erhalten wir

schließlich nach Hilfssatz (3.3)

$g(R(m, p, q), \varphi_m) \leq g(A, \varphi_m) + g(B, \varphi_m) \leq (m-2)(p-1)+q-1+p-1 =$

$= (m-1)(p-1)+q-1$.

2) Wir zeigen nun, daß $g(R(m, p, q), \varphi_m) = (m-1)(p-1)+q-1$ ist.
 Für $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p) \in R(m, p, q)$ ist
 $\delta := \frac{1}{2} \min \{ \|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\| \mid i, j \in \{1, \dots, p\}, \tilde{x}_i \neq \tilde{x}_j \} > 0$, und es ist
 $K(\tilde{x}_1, \delta) \times \dots \times K(\tilde{x}_p, \delta) \subset R(m, p, q)$, d.h. $R(m, p, q)$ ist offen
 in $(\mathbb{R}^m)^p$, also auch in $R(m, p, p)$. Folglich ist
 $D(m, p, q) = R(m, p, p) \cap R(m, p, q)$ abgeschlossen in $R(m, p, p)$
 und somit gilt nach Lemma (4.4), Hilfssatz (3.3) und
 Lemma (4.3)
 $m(p-1) = g(R(m, p, p), \varphi_m) = g(D(m, p, q) \cup R(m, p, q), \varphi_m) \leq$
 $\leq g(D(m, p, q), \varphi_m) + g(R(m, p, q), \varphi_m) \leq p-q + g(R(m, p, q), \varphi_m)$, also
 $g(R(m, p, q), \varphi_m) \geq m(p-1) - (p-q) = m(p-1) - [(p-1) - (q-1)] =$
 $= (m-1)(p-1) + q - 1.$

Das nächste Lemma benötigen wir zum Beweis von
 Satz (5.2), Seite 34.

(4.7) Lemma.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ und für alle Primzahlen p ist

$$g(K(m, p), \varphi_m) = (m-1)(p-1) + 1.$$

Beweis.

1) $g(K(m, p), \varphi_m) \geq (m-1)(p-1) + 1$ folgt wegen $R(m, p, 2) \subset K(m, p)$
 aus Lemma (4.6).

2) $g(K(m, p), \varphi_m) \leq (m-1)(p-1) + 1$ zeigen wir durch Induktion
 nach m .

a) $m = 1$. Zum Nachweis von $g(K(1, p), \varphi_1) \leq 1$ bilden wir

$K(1, p)$ äquivalent in einen diskreten Raum mit freier

$\mathbb{Z}_p$ -Aktion ab: Es sei $M := \{-1, 1\}^p \setminus \{(-1, \dots, -1), (1, \dots, 1)\}$.

M werde mit der diskreten Topologie versehen. Es sei

$\varphi : M \rightarrow M$, $\varphi(s_1, \dots, s_p) := (s_2, \dots, s_p, s_1)$. φ ist offensicht-

lich freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M . Wir definieren noch

$J : K(1, p) \rightarrow M$ durch

$J(x_1, \dots, x_p) := (\text{sign}(x_1 - x_2), \dots, \text{sign}(x_{p-1} - x_p), \text{sign}(x_p - x_1))$.

Dann gilt $\bigcup_{s \in M} J^{-1}(\{s\}) = J^{-1}(M) = K(1, p)$, für alle $s \in M$ ist

$J^{-1}(\{s\})$ abgeschlossen in $K(1, p)$, und $J|_{J^{-1}(\{s\})}$ ist

trivialerweise stetig. Die Äquivarianz von J ist klar.

Nach Hilfssatz (3.4) und (3.1) gilt somit

$$g(K(1, p), \varphi_1) \leq g(M, \varphi) \leq 1.$$

b) Es sei nun $m \geq 2$. Wir zeigen $g(K(m, p), \varphi_m) \leq (m-1)(p-1)+1$ unter der Annahme, daß $g(K(1, p), \varphi_1) \leq (1-1)(p-1)+1$ für alle $1 \in \mathbb{N}$ mit $1 < m$ gilt. Dabei gehen wir ganz analog wie beim

Beweis von Lemma (4.6) (Abschnitt 1b) vor:

Für $x = (x_1, \dots, x_p) \in K(m, p)$ schreiben wir $x_i = (y_i, \tilde{x}_i)$ mit

$y_1 \in \mathbb{R}$, $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}^{m-1}$, $i = 1, \dots, p$, und wir setzen

$A := \{((y_1, \tilde{x}_1), (y_2, \tilde{x}_2), \dots, (y_p, \tilde{x}_p)) \in K(m, p) \mid y_1 = y_2 = \dots = y_p\}$ und

$B := K(m, p) \setminus A = \{((y_1, \tilde{x}_1), \dots, (y_p, \tilde{x}_p)) \in K(m, p) \mid \text{card}\{y_1, \dots, y_p\} \geq 2\}$.

A und B sind invariant unter φ_m , und die Projektion

$((y_1, \tilde{x}_1), \dots, (y_p, \tilde{x}_p)) \mapsto (x_1, \dots, x_p)$ bzw.

$((y_1, \tilde{x}_1), \dots, (y_p, \tilde{x}_p)) \mapsto (y_1, \dots, y_p)$

$((y_1, \tilde{x}_1), \dots, (y_p, \tilde{x}_p)) \in K(m, p)$ bildet offensichtlich A

Äquivariant in $K(m-1, p)$ bzw. B Äquivariant in $R(1, p, p)$ ab.

A ist zudem abgeschlossen in $K(m, p)$. Daher folgt nach

Hilfssatz (3.3), Hilfssatz (3.4), Lemma (4.4) und nach

Induktionsannahme

$$g(K(m, p), \varphi_m) = g(A \cup B, \varphi_m) \leq g(A, \varphi_m) + g(B, \varphi_m) \leq$$

$$\leq g(K(m-1, p), \varphi_{m-1}) + g(R(1, p, p), \varphi_1) \leq (m-2)(p-1)+1+p-1 =$$

$$= (m-1)(p-1)+1.$$

5. Verallgemeinerungen des Satzes von Borsuk-Ulam.

Es sollen nun zwei Sätze vom Borsuk-Ulam-Typ bewiesen werden. Der Beweis dieser Sätze ist eines der Hauptziele der vorliegenden Arbeit. Der erste der Sätze ist eine direkte Verallgemeinerung von Resultaten von Evarc [24] und Steinlein [22]. Später werden noch Resultate von Cohen, Connett, Lusk, Munkholm [3,4,5,16,19] in den Rahmen dieser Sätze eingeordnet werden (vgl. IV, 9).

(5.1) Satz.

- a) Es sei M ein Hausdorff-Raum, $m \in \mathbb{N}$, p prim, $f : M \rightarrow M$ freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M , $h : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, $q \in \{2, \dots, p\}$. $g'(M, f)$ sei definiert und es gelte

$$(A_1) \quad g'(M, f) > (m-1)(p-1) + q - 1.$$

Dann ist

$$M_1 := \left\{ x \in M \mid \begin{array}{l} \text{Es gibt } i_1, \dots, i_q \in \{0, \dots, p-1\}, \\ i_1 < i_2 < \dots < i_q, \text{ mit} \\ h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x)) = \dots = h(f^{i_q}(x)) \end{array} \right\} \neq \emptyset.$$

- b) Es sei M normal. Dann gilt im Fall $g'(M, f) < \infty$ sogar $g'(M_1, f) \geq g'(M, f) - [(m-1)(p-1) + q - 1]$.

Falls $g'(M, f)$ unendlich ist, gilt $g'(M_1, f) = g'(M, f)$.

Beweis:

- a) Es ist

$$M \setminus M_1 = \left\{ x \in M \mid \begin{array}{l} \text{Für alle } i_1, \dots, i_q \in \{0, \dots, p-1\} \text{ mit} \\ \text{card } \{i_1, \dots, i_q\} = q \text{ ist} \\ \text{card } \{h(f^{i_1}(x)), \dots, h(f^{i_q}(x))\} \geq 2 \end{array} \right\}$$

und $M \setminus M_1$ ist invariant unter f . Durch

$P(x) := (h(x), h(f(x)), \dots, h(f^{p-1}(x)))$ für $x \in M \setminus M_1$ wird offensichtlich eine äquivalente Abbildung

$P : M \setminus M_1 \rightarrow R(m, p, q)$ definiert. Nach Hilfssatz (3.4) ist $g'(M \setminus M_1, f)$ definiert und es gilt $g'(M \setminus M_1, f) \leq g(R(m, p, q), \varphi_m)$. Nach Lemma (4.6) gilt $g(R(m, p, q), \varphi_m) = (m-1)(p-1) + q - 1$, also haben wir $g'(M \setminus M_1, f) \leq (m-1)(p-1) + q - 1$, woraus $M_1 \neq \emptyset$ folgt.

b) Wegen $M_1 = \bigcup_{i_1, \dots, i_q \in \{0, \dots, p-1\}} \left(\bigcap_{k=1}^{q-1} \{x \in M \mid (h \circ f^{i_k})(x) = (h \circ f^{i_{k+1}})(x)\} \right)$ ist M_1 abgeschlossen, und M_1 ist invariant unter f . Für normales M ist auch M_1 normal, und folglich gilt nach (1.8) $g'(M, f) = g(M, f)$ und $g'(M_1, f) = g(M_1, f)$. Im Fall $g'(M, f) < \infty$ ist wegen $M_1 \subset M$ auch $g(M_1, f) \leq g(M, f) < \infty$, und somit gilt nach Hilfssatz (3.3) und nach (1.8)

$$g'(M, f) = g(M, f) \leq g(M_1, f) + g(M \setminus M_1, f) \leq g'(M_1, f) + g'(M \setminus M_1, f) \leq g'(M_1, f) + (m-1)(p-1) + q - 1, \text{ also}$$

$$g'(M_1, f) \geq g'(M, f) - [(m-1)(p-1) + q - 1]. \text{ Aus}$$

$g(M, f) \leq g(M_1, f) + (m-1)(p-1) + q - 1$ für $g(M_1, f) < \infty$ folgt insbesondere, daß für unendliches $g(M, f)$ auch $g(M_1, f)$ unendlich sein muß. Man sieht leicht (vgl. Beweis von (3.3), Teil a)), daß für unendliches $g(M_1, f)$ die Beziehung $g(M, f) \leq g(M_1, f) + g(M \setminus M_1, f)$ wegen $g(M \setminus M_1, f) < \infty$ durch $g(M, f) \leq g(M_1, f)$ ersetzt werden kann. Damit gilt im Fall, daß $g'(M, f)$ unendlich ist, $g(M, f) \leq g(M_1, f) \leq g(M, f)$, also $g'(M_1, f) = g(M_1, f) = g(M, f) = g'(M, f)$.

Im Fall $q = 2$ läßt sich Satz (5.1) noch verschärfen. Wir können nämlich zeigen, daß aus $g'(M, f) > (m-1)(p-1) + 1$ die Existenz eines $x \in M$ mit $h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x))$ sogar bei vorgegebenen $i_1, i_2 \in \{0, \dots, p-1\}$, $i_1 \neq i_2$, folgt.

(5.2) Satz.

- a) Es sei M ein Hausdorff-Raum, $m \in \mathbb{N}$, p prim, $f: M \rightarrow M$ freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M , $h: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Es seien $i_1, i_2 \in \{0, \dots, p-1\}$, $i_1 \neq i_2$, $g'(M, f)$ sei definiert und es gelte

$$(A_2) \quad g'(M, f) > (m-1)(p-1)+1.$$

Dann ist $M_2 := \{x \in M \mid h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x))\} \neq \emptyset$.

- b) Es sei M normal. Dann gilt für $M'_2 := \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k \cdot M_2$ im Fall $g'(M, f) < \infty$

$$g'(M'_2, f) \geq g'(M, f) - [(m-1)(p-1)+1].$$

Falls $g'(M, f)$ unendlich ist, gilt $g'(M'_2, f) = g'(M, f)$.

Beweis.

1) Wir führen den allgemeinen Fall zurück auf den Fall

$i_1 = 0$, $i_2 = 1$. Hierzu eine Vorbemerkung:

Es sei $r \in \{1, \dots, p-1\}$ und $\tilde{f} := f^r$. Nach (1.2) ist dann auch $\tilde{f}$ freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M . Es sei $N \subset M$ invariant unter f .

(Dann ist N trivialerweise auch invariant unter $\tilde{f}$.) Wegen $\{A, f(A), f^2(A), \dots, f^{p-1}(A)\} = \{A, f^r(A), f^{2r}(A), \dots, f^{p-1}r(A)\} = \{A, \tilde{f}(A), \tilde{f}^2(A), \dots, \tilde{f}^{p-1}(A)\}$ für alle $A \subset M$ ist

$\mathcal{C}'(N, f) = \mathcal{C}'(N, \tilde{f})$, und folglich ist $g'(N, f)$ genau dann definiert, wenn $g'(N, \tilde{f})$ definiert ist, und es gilt

$g'(N, \tilde{f}) = g'(N, f)$ falls eine der Zahlen existiert.

2) a) O.B.d.A. sei $i_1 < i_2$. Es sei $\tilde{f} := f^{i_2-i_1}$ und

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2 &:= \{x \in M \mid h(x) = h(\tilde{f}(x))\}. \text{ Dann ist } \tilde{M}_2 = f^{i_1}(M_2) \text{ und es} \\ \text{gilt } \{x \in M \mid \text{Es gibt } j \in \{0, \dots, p-1\} \text{ mit } h(\tilde{f}^j(x)) &= h(\tilde{f}^{j+1}(x))\} = \\ &= \bigcup_{k=0}^{p-1} \tilde{f}^k(\tilde{M}_2) = \bigcup_{k=0}^{p-1} f^{k(i_2-i_1)}(\tilde{M}_2) = \bigcup_{l=0}^{p-1} f^l(\tilde{M}_2) = \bigcup_{l=0}^{p-1} f^{l+i_1}(M_2) = \\ &= \bigcup_{l=0}^{p-1} f^l(M_2) = M'_2. \quad M'_2 \text{ und} \end{aligned}$$

$$M \setminus M'_2 = \left\{ x \in M \left| \begin{array}{l} h(x) \neq h(\tilde{f}(x)), h(\tilde{f}(x)) \neq h(\tilde{f}^2(x)), \dots, \\ h(\tilde{f}^{p-2}(x)) \neq h(\tilde{f}^{p-1}(x)), h(\tilde{f}^{p-1}(x)) \neq h(x) \end{array} \right. \right\}$$

sind invariant unter f und $\tilde{f}$, und durch

$P(x) := (h(x), h(\tilde{f}(x)), \dots, h(\tilde{f}^{p-1}(x)))$ für $x \in M \setminus M_2'$ wird eine bzgl. $\tilde{f}$ äquivalente Abbildung $M \setminus M_2' \rightarrow K(m, p)$ definiert.

Nach Hilfssatz (3.4) ist $g'(M \setminus M_2', \tilde{f})$ definiert und es gilt $g'(M \setminus M_2', \tilde{f}) \leq g(K(m, p), \varphi_m)$. Nach 1) ist $g'(M \setminus M_2', f)$ definiert und $g'(M \setminus M_2', f) = g'(M \setminus M_2', \tilde{f})$, also erhalten wir mit Lemma (4.7) $g'(M \setminus M_2', f) \leq g(K(m, p), \varphi_m) = (m-1)(p-1)+1$.

Folglich ist $M_2' \neq \emptyset$, und somit ist auch $M_2 \neq \emptyset$.

b) Es sei M normal. M_2 ist abgeschlossen, und da f Homöomorphismus ist, ist auch M_2' abgeschlossen. Völlig analog wie im Beweis von (5.1b) zeigt man nun

$g'(M_2, f) \geq g'(M, f) - [(m-1)(p-1)+1]$ für $g'(M, f) < \infty$ und

$g'(M_2, f) = g'(M, f)$ für unendliches $g'(M, f)$.

(5.3) Bemerkung.

a) Für $q = p$ wurde Satz (5.1) schon von Švarc und Steinlein bewiesen, vgl. [24], Theorem 30 und Korollar zu Theorem 29, sowie [22], Satz 11.

b) Für $M = S^n$, $p = q = 2$, $f = -id_{S^n}$, $n \geq m$, erhalten wir wegen $g'(S^n, -id_{S^n}) = g(S^n, -id_{S^n}) = n+1$ aus Satz (5.1) oder (5.2) den ursprünglichen Satz von Borsuk-Ulam. Es sei jedoch betont, daß diese Herleitung des Satzes von Borsuk-Ulam aus den elementar beweisbaren Sätzen (5.1) bzw. (5.2) keineswegs bedeutet, daß der Borsuk-Ulamsche Satz elementar sei, denn wir benötigen für die Herleitung ja jeweils die tiefliegende Aussage $g'(S^n, -id_{S^n}) \geq n+1$.

c) Punkte $x \in M_1$ bzw. M_2 (M_1, M_2 wie in Satz (5.1) bzw. (5.2)) werden im folgenden oft kurz als "Koinzidenzpunkte" bezeichnet.

Für die oben erwähnte Einordnung weiterer Resultate in den Rahmen von Satz (5.1), (5.2) ist es zweckmäßig, noch eine äquivalente Formulierung von (5.1a) bzw. (5.2a) anzugeben.

(5.4) Satz.

Es seien M, m, p, f, h, q wie in (5.1a). Für alle $x \in M$ und für alle $i_1, \dots, i_q \in \{0, \dots, p-1\}$ mit $i_1 < \dots < i_q$ gelte $\text{card} \{h(f^{i_1}(x)), \dots, h(f^{i_q}(x))\} \geq 2$. Dann ist $g'(M, f)$ definiert und es gilt $g'(M, f) \leq (m-1)(p-1) + q - 1$.

(5.5) Satz.

Es seien M, m, p, f, h wie in (5.2a). Es gebe $i_1, i_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ mit $h(f^{i_1}(x)) \neq h(f^{i_2}(x))$ für alle $x \in M$. Dann ist $g'(M, f)$ definiert und es gilt $g'(M, f) \leq (m-1)(p-1) + 1$.

Zur Äquivalenz von (5.4) mit (5.1a) und (5.5) mit (5.2a):

Es ist klar, daß (5.1a) aus (5.4) und (5.2a) aus (5.5) folgt. Es seien nun M_1, M_2 wie in (5.1a) bzw. (5.2a). Im Beweis von (5.1a) bzw. (5.2a) wurde gezeigt, daß $g'(M \setminus M_1, f)$ bzw. $g'(M \setminus M_2, f)$ für beliebige i_1, i_2 definiert ist (unabhängig von der Existenz von $g'(M, f)$) und daß $g'(M \setminus M_1, f) \leq (m-1)(p-1) + q - 1$ bzw. $g'(M \setminus M_2, f) \leq (m-1)(p-1) + 1$ gilt. Die Voraussetzungen von (5.4) bzw. (5.5) besagen gerade, daß M_1 bzw. M_2 (für gewisse i_1, i_2) leer ist. Somit ist unter den Voraussetzungen (5.4) bzw. (5.5) $g'(M, f)$ definiert und es gilt $g'(M, f) \leq (m-1)(p-1) + q - 1$ bzw. $g'(M, f) \leq (m-1)(p-1) + 1$.

Kapitel III

Im folgenden soll die Frage der Optimalität der Resultate in II, 5 behandelt werden. Zunächst wird anhand eines Beispiels gezeigt, daß schwächere Abschätzungen als (A_1) in (5.1a) bzw. (A_2) in (5.2a) im allgemeinen für die Existenz von Koinzidenzpunkten nicht ausreichen. In diesem Sinne sind (A_1) bzw. (A_2) für allgemeine Räume M mit freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen f optimal. Betrachtet man dagegen spezielle Räume M mit freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen, so wäre es denkbar, daß auch schon schwächere Abschätzungen als (A_1) bzw. (A_2) die Existenz von Koinzidenzpunkten für jedes stetige $h : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ garantieren. Wir untersuchen diese Frage (im Fall $q=2$) für Räume, die mit Sphären eng verwandt sind, und für spezielle freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen. Es stellt sich heraus, daß man zumindest in gewissen Fällen tatsächlich mit schwächeren Abschätzungen auskommt. Allerdings erweist es sich als sehr schwierig, optimale Abschätzungen zu finden.

6. Optimalität der Resultate in II, 5. Ein Beispiel.

Es sei $m \in \mathbb{N}$, p prim, $q \in \{2, \dots, p\}$. Das folgende Beispiel zeigt, daß schon im Fall $g'(M, f) = (m-1)(p-1)+q-1$ nicht für jedes stetige $h : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ Koinzidenzpunkte zu existieren brauchen.

(6.1) Beispiel.

Es sei $M := R(m, p, q)$, $f : M \rightarrow M$, $f := \varphi_m$, $h : M \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$h(x_1, \dots, x_p) := x_p$. Nach (1.8) und Lemma (4.6) ist

$g'(M, f) = g(M, f) = (m-1)(p-1)+q-1$. Es sei nun

$x = (x_1, \dots, x_p) \in M$ und es seien $i_1, \dots, i_q \in \{0, \dots, p-1\}$ mit

$i_1 < i_2 < \dots < i_q$. Wegen $h(f^j(x)) = h(\varphi_m^j(x_1, \dots, x_p)) =$

$$= \begin{cases} x_p & \text{für } j = 0 \\ h(x_{j+1}, \dots, x_p, x_1, \dots, x_j) = x_j & \text{für } j \in \{1, \dots, p-1\} \end{cases}$$

ist dann $\{h(f^{i_1}(x)), h(f^{i_2}(x)), \dots, h(f^{i_q}(x))\} =$
 $= \begin{cases} \{x_p, x_{i_2}, \dots, x_{i_q}\} & \text{falls } i_1 = 0 \\ \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_q}\} & \text{falls } i_1 > 0 \end{cases}$, und folglich gilt in
beiden Fällen $\text{card} \{h(f^{i_1}(x)), h(f^{i_2}(x)), \dots, h(f^{i_q}(x))\} \leq 2$,
d.h. für h existieren keine Koinzidenzpunkte.

7. Die Frage der Optimalität für spezielle topologische Räume.

In diesem Abschnitt sollen anstelle der allgemeinen Räume M in Satz (5.2a) Sphären bzw. mit Sphären eng verwandte Polyeder mit speziellen freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen betrachtet werden. Würden wir von vornherein nur Sphären in Betracht ziehen, so müßten wir für die Existenz von freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen mit $p \geq 3$ zusätzlich voraussetzen, daß die Sphärendimension ungerade ist. Auf Sphären ungerader Dimension existieren für jede Primzahl p freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen (siehe unten), dagegen gibt es keine freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf S^n wenn $p \geq 3$ und n gerade ist. (Letzteres ist klar für $n = 0$. Es sei $n \in \mathbb{N}$, p eine Primzahl mit $p \geq 3$ und f sei freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf S^n . Da f fixpunktfrei ist, ist f homotop zu $-\text{id}_{S^n}$, und folglich gilt für den von f induzierten Homomorphismus $f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ $f_* = (-1)^{n+1} \text{id}_{H_n(S^n)}$ (vgl. hierzu etwa [10], Corollary (16.4)). Es folgt $\text{id}_{H_n(S^n)} = (\text{id}_{S^n})_* = (f^p)_* = (f_*)^p = ((-1)^{n+1})^p \text{id}_{H_n(S^n)} = (-1)^{n+1} \text{id}_{H_n(S^n)}$, und somit muß wegen $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$ n ungerade sein.)

(7.1) Definition (vgl. [22], Seite 31).

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, p prim. Mit $l_2 := \{(z_1, z_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2 < \infty\}$

und $\|z\| := (\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2)^{1/2}$ für $z = (z_1, z_2, \dots) \in l_2$ sei

$$F_{n,p} := \begin{cases} \emptyset & \text{für } n = 0 \\ \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{n}{2}}, 0, 0, \dots) \in l_2 \mid \|z\| = 1\} & \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \\ \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}, 0, 0, \dots) \in l_2 \mid \|z\| = 1, \arg z_{\frac{n+1}{2}} \in \{\frac{k}{p} 2\pi \mid k=0, \dots, p-1\}\} & \text{für } n = 1, 3, 5, \dots, \text{ (Vereinbarung: } \arg 0 := 0) \end{cases}$$

und $\varphi_{n,p} : F_{n,p} \rightarrow F_{n,p}$ sei definiert durch

$$\varphi_{n,p}(z) = \varphi_{n,p}(z_1, \dots, z_{[\frac{n}{2}]}, 0, 0, \dots) := (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, \dots, e^{\frac{2\pi i}{p}} z_{[\frac{n}{2}]}, 0, 0, \dots)$$

für $z = (z_1, \dots, z_{[\frac{n}{2}]}, 0, 0, \dots) \in F_{n,p}$, wobei $[\frac{n}{2}] := \frac{n}{2}$ für

gerades n und $[\frac{n}{2}] := \frac{n+1}{2}$ für ungerades n .

(7.2) Bemerkung.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle p sind die $F_{n,p}$ $(n-1)$ -dimensionale Polyeder, für $p = 2$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und für gerade $n \in \mathbb{N}$, p beliebig, sogar Sphären S^{n-1} . Die $\varphi_{n,p}$ sind offensichtlich für alle n und p freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen auf $F_{n,p}$.

Wir geben nun einige wichtige Eigenschaften von $F_{n,p}$ und $\varphi_{n,p}$ an.

(7.3) Lemma (vgl. [22], Hilfssatz 12).

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle Primzahlen p ist

$$g'(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) = g(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) = n.$$

Beweis.

[22], Hilfssatz 12, und (1.8).

Das folgende Resultat charakterisiert das Geschlecht von Räumen mit freier $\mathbb{Z}_p$ -Aktion mit Hilfe äquivarianter Abbildungen von diesen Räumen in die Polyeder $F_{n,p}$.

(7.4) Satz (vgl. [22], Satz 2, [23], Theorem 1, [24], Theorem 14' und Korollare 3 und 4 auf Seite 98).

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, p prim, und es sei M ein Hausdorff-Raum mit freier $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f . Dann sind äquivalent:

a) $g'(M, f)$ existiert und es ist $g'(M, f) \leq n$.

b) Es gibt eine äquivalente Abbildung $P : M \rightarrow F_{n, p}$.

Beweis.

1) Es gelte b). Dann folgt a) wegen Lemma (7.3) und Hilfsatz (3.4).

2) Es gelte a). Es sei $s := g'(M, f) \leq n$. Wir konstruieren eine äquivalente Abbildung $\tilde{P} : M \rightarrow F_{s, p}$. Da die Inklusion $J : F_{s, p} \hookrightarrow F_{n, p}$ äquivariant ist, erhalten wir dann mit $P := J \circ \tilde{P}$ eine äquivalente Abbildung $P : M \rightarrow F_{n, p}$.

Konstruktion von $\tilde{P}$: Der Fall $s = 0$ ist wegen $M = \emptyset$ und $F_{0, p} = \emptyset$ trivial. Im Fall $s = g'(M, f) > 1$ gibt es nach Definition von $g'(M, f)$ $D_1, \dots, D_s \subset M$ mit $\bigcup_{j=1}^s D_j = M$, $D_j = \bigcup_{k=0}^{p-1} V_k^j$ ($j = 1, \dots, s$), wobei für $j = 1, \dots, s$ und $k, l = 0, \dots, p-1$ V_k^j offene Teilmenge von M ist, $V_k^j \cap V_l^j = \emptyset$ für $k \neq l$ gilt und $V_k^j = f^k(V_0^j)$ ist, und es gibt stetige Abbildungen $t_1, \dots, t_s : M \rightarrow [0, 1]$ mit $t_j|_{M \setminus D_j} = 0$ ($j = 1, \dots, s$) und mit der Eigenschaft: Zu jedem $x \in M$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, s\}$ mit $t_j(x) = 1$. O.B.d.A. können wir zudem annehmen, daß für alle $x \in M$, $j = 1, \dots, s$ $t_j(x) = t_j(f(x))$ gilt (andernfalls ersetzt man t_j durch $\tilde{t}_j := \max\{t_j, t_j \circ f, \dots, t_j \circ f^{p-1}\}$).

Für $j = 1, \dots, s$ definieren wir nun stetige Abbildungen $q_j : M \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$q_j(x) := \begin{cases} t_j(x) e^{k \frac{2\pi i}{p}} & \text{falls } x \in V_k^j \subset D_j, k \in \{0, \dots, p-1\} \\ 0 & \text{falls } x \notin D_j \end{cases}.$$

Für gerades s seien $Q_1, \dots, Q_{\frac{s}{2}} : M \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$Q_1(x) := q_1(x) + iq_2(x), \dots, Q_{\frac{s}{2}}(x) := q_{s-1}(x) + iq_s(x),$$

und es sei $Q : M \rightarrow l_2$, $Q(x) := (Q_1(x), \dots, Q_{\frac{s}{2}}(x), 0, 0, \dots)$.

Für ungerades s seien $Q_1, \dots, Q_{\frac{s+1}{2}} : M \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$Q_1(x) := q_1(x) + iq_2(x), \dots, Q_{\frac{s+1}{2}}(x) := q_{s-2}(x) + iq_{s-1}(x),$$

$$Q_{\frac{s+1}{2}}(x) := q_s(x), \text{ und es sei } Q : M \rightarrow l_2,$$

$$Q(x) := (Q_1(x), \dots, Q_{\frac{s+1}{2}}(x), 0, 0, \dots).$$

Dann gilt in beiden Fällen $Q(x) \neq (0, 0, \dots)$ für alle $x \in M$:

Zu $x \in M$ wählen wir $j \in \{1, \dots, s\}$ mit $t_j(x) = 1$. Dann ist

$$\text{trivialerweise } x \in D_j \text{ und daher } q_j(x) = t_j(x) e^{k \frac{2\pi i}{p}} = e^{k \frac{2\pi i}{p}}$$

mit $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Falls s ungerade und $j = s$ ist, so ist

$$Q_{\frac{s+1}{2}}(x) = q_s(x) = e^{k \frac{2\pi i}{p}} \neq 0. \text{ Es sei nun } j < s \text{ falls } s \text{ ungerade}$$

ist. Für ungerades j gilt

$$Q_{\frac{j+1}{2}}(x) = q_j(x) + iq_{j+1}(x) = e^{k \frac{2\pi i}{p}} + iq_{j+1}(x) =$$

$$= \begin{cases} e^{k \frac{2\pi i}{p}} \neq 0 & \text{falls } x \notin D_{j+1} \\ e^{k \frac{2\pi i}{p}} + t_{j+1}(x) i e^{l \frac{2\pi i}{p}} \neq 0 \text{ (mit } l \in \{0, \dots, p-1\}) & \text{falls } x \in D_{j+1}. \end{cases}$$

(Man beachte, daß $e^{k \frac{2\pi i}{p}}$ und $i e^{l \frac{2\pi i}{p}}$ für alle $k, l \in \{0, \dots, p-1\}$

linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind.) Für gerades j gilt

$$Q_{\frac{j}{2}}(x) = q_{j-1}(x) + iq_j(x) = q_{j-1}(x) + i e^{k \frac{2\pi i}{p}} =$$

$$= \begin{cases} i e^{k \frac{2\pi i}{p}} \neq 0 & \text{falls } x \notin D_{j-1} \\ t_{j-1}(x) e^{l \frac{2\pi i}{p}} + i e^{k \frac{2\pi i}{p}} \neq 0 \text{ (mit } l \in \{0, \dots, p-1\}) & \text{falls } x \in D_{j-1}. \end{cases}$$

In jedem Fall ist also $Q(x) \neq (0, 0, \dots)$.

Für $x \in M$ sei nun $\tilde{P}(x) := \frac{Q(x)}{\|Q(x)\|}$. Wegen $\|\tilde{P}(x)\| = 1$ und wegen $\arg Q_{\frac{s+1}{2}}(x) = \arg q_s(x) \in \{k \frac{2\pi}{p} \mid k = 0, \dots, p-1\}$ für ungerades s ist $\tilde{P}(x) \in F_{s,p}$, also $\tilde{P} : M \rightarrow F_{s,p}$.

$\tilde{P}$ ist Äquivariant: Es sei $x \in M$, $j \in \{1, \dots, s\}$. Für $x \in V_k^j \subset D_j$ ($k \in \{0, \dots, p-1\}$) ist $f(x) \in V_{k^+}^j$, wobei $k^+ \in \{0, \dots, p-1\}$ durch $k^+ \equiv k+1 \pmod{p}$ bestimmt ist, und daher gilt

$q_j(f(x)) = t_j(f(x)) e^{k \frac{2\pi i}{r}} = t_j(x) e^{\frac{2\pi i}{r}} e^{k \frac{2\pi i}{r}} = e^{\frac{2\pi i}{r}} q_j(x)$. Für $x \notin D_j$ ist auch $f(x) \notin D_j$, und somit gilt $q_j(f(x)) = 0 = e^{\frac{2\pi i}{r}} q_j(x)$. Aus $q_j(f(x)) = e^{\frac{2\pi i}{r}} q_j(x)$ für alle $x \in M$, $j \in \{1, \dots, s\}$ folgt schließlich

$$\tilde{P}(f(x)) = \frac{Q(f(x))}{\|Q(f(x))\|} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{r}} Q(x)}{\|e^{\frac{2\pi i}{r}} Q(x)\|} = e^{\frac{2\pi i}{r}} \frac{Q(x)}{\|Q(x)\|} = e^{\frac{2\pi i}{r}} \tilde{P}(x) = \varphi_{s,p}(\tilde{P}(x)).$$

(7.5) Bemerkung.

Ganz analog wie oben läßt sich zeigen, daß im Fall $g'(M, f) = \infty$ (abzählbar unendlich) eine äquivalente Abbildung von M in $S := \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ existiert, wobei S mit der freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktion $\varphi: S \rightarrow S$, $\varphi(z) := e^{\frac{2\pi i}{p}} z$, versehen wird. Man definiert hierzu zu einer zulässigen Überdeckung $\{D_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}'(M, f)$ von M Abbildungen $q_j: M \rightarrow \mathbb{C}$ und $Q_j = q_{2j-1} + i q_{2j}$, $j \in \mathbb{N}$, wie oben. Die Q_j werden noch mit passenden Faktoren $c_j \in \mathbb{R}$ multipliziert, die garantieren, daß für alle $x \in M$ $Q(x) := (c_1 Q_1(x), c_2 Q_2(x), \dots) \in \mathbb{C}_2$ ist (z.B. kann man $c_j := 2^{-j}$ nehmen). Mit $P(x) := \frac{Q(x)}{\|Q(x)\|}$, $x \in M$, erhält man eine äquivalente Abbildung $P: M \rightarrow S$.

Man kann ferner zeigen, daß je zwei äquivalente Abbildungen $P_0, P_1: M \rightarrow S$ durch eine äquivalente Homotopie verbunden werden können, d.h. es gibt eine Homotopie $H: M \times [0, 1] \rightarrow S$ derart, daß $H(., 0) = P_0$, $H(., 1) = P_1$ und $H(., t): M \rightarrow S$ für alle $t \in [0, 1]$ äquivalent ist. (vgl. hierzu [24], Theorem 10). Darauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden, da wir diese Aussage im folgenden nicht benötigen.

(7.6) Bemerkung.

Ein (7.4) entsprechendes Resultat findet man in [23], Theorem 1, und in [24], Theorem 14'. Dort werden anstelle der $F_{n,p}$ komplizierter zu konstruierende Räume verwendet.

Für normale Räume M mit freier $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f und mit $s := g(M, f) < \infty$ wird die Existenz einer äquivarianten Abbildung $P : M \rightarrow F_{s,p}$ in [22], Satz 2 bewiesen. Dort wird zudem gezeigt, daß jedes derartige P surjektiv ist. Diese Aussage gilt auch für nicht normale Räume M .

Der nächste Satz behandelt die Frage nach der Existenz von äquivarianten Abbildungen $F_{n,p} \rightarrow M$. Wie in [22] anhand von Beispielen gezeigt wird, ist eine Umkehrung von Satz (7.4) der Form "Zu jedem Raum M mit freier $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f und mit $g(M, f) \geq n$ existiert ein äquivariantes $P : F_{n,p} \rightarrow M$ " im allgemeinen falsch. (Vgl. [22], Beispiele 1, 2'. Es lassen sich jedoch gewisse allgemeine Fälle von Paaren (M, f) angeben, für die äquivariante Abbildungen $P : F_{n,p} \rightarrow M$ existieren. Aus der Existenz einer solchen Abbildung P folgt mit Lemma (7.3), Hilfssatz (3.4) und (1.8) $n = g(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \leq g(M, f) \leq g'(M, f)$ (wir setzen voraus, daß $g'(M, f)$ definiert ist), d.h. man erhält insbesondere Abschätzungen des Geschlechts nach unten.

(7.7) Satz (vgl. [22], Satz 3, und [24], Theorem 15 und Korollar 2 auf Seite 97).

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, p prim. Es sei $M \neq \emptyset$ ein n -zusammenhängender Hausdorff-Raum mit freier $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f . Dann gibt es eine äquivariante Abbildung $P : F_{n+2,p} \rightarrow M$, insbesondere ist also $g(M, f) \geq n+2$.

Beweis.

[22], Satz 3.

Wir kommen nun auf die am Anfang von Kapitel VII formulierte Fragestellung (Existenz von Koinzidenzpunkten auf speziellen Räumen) zurück. Genauer gesagt soll die folgende Frage untersucht werden:

(7.8) Es sei $m \in \mathbb{N}$, p prim. Welches ist dann der kleinste Wert n_0 , so daß für jedes stetige $h : F_{n_0, p} \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Existenz von Punkten $z \in F_{n_0, p}$ mit $h(z) = h(\varphi_{n_0, p}(z))$ garantiert ist?

Diese Frage verdient besonderes Interesse, da gerade die Räume $F_{n, p}$ ein optimales Ergebnis hinsichtlich der Existenz von Koinzidenzpunkten liefern. Das ergibt sich aus der folgenden Aussage:

(7.9) Für $m \in \mathbb{N}$, p prim, sei n_0 gemäß (7.8) definiert. Dann gibt es zu jedem Hausdorff-Raum M und zu jeder freien Z_p -Aktion f auf M mit $g'(M, f) < n_0$ ein stetiges $h : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $h(x) \neq h(f(x))$ für alle $x \in M$. (Wir setzen hier sowie im folgenden voraus, daß $g'(M, f)$ definiert sein soll.)

Zu (7.9):

Nach Satz (7.4) gibt es ein äquivariantes $P : M \rightarrow F_{n_0-1, p}$ und nach Definition von n_0 gibt es ein stetiges

$h' : F_{n_0-1, p} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $h'(z) \neq h'(\varphi_{n_0-1, p}(z))$ für alle $z \in F_{n_0-1, p}$. Es sei $h : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h := h' \circ P$. Dann gilt für alle $x \in M$

$$h(f(x)) = h'(P(f(x))) = h'(\varphi_{n_0-1, p}(P(x))) \neq h'(P(x)) = h(x).$$

Für Räume M mit freien Z_p -Aktionen f und für stetige $h : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ kann man somit folgende Fälle unterscheiden:

1) Falls $g'(M, f) > (m-1)(p-1)+2$ ist, so existieren wegen Satz (5.2a) für jedes h Koinzidenzpunkte (wir verwenden hier diese Bezeichnung ausschließlich für Punkte $x \in M$ mit $h(x) = h(f(x))$). Insbesondere ist also $n_0 \leq (m-1)(p-1)+2$.

2) Falls $g'(M, f) < n_0$ ist, so existieren nicht für jedes h Koinzidenzpunkte.

3) Im Fall $n_0 < (m-1)(p-1)+2$ wird es für $n_0 \leq g'(M, f) < (m-1)(p-1)+2$ von der Qualität von M abhängen, ob für jedes h Koinzidenzpunkte existieren.

Die Bestimmung von n_0 erweist sich als sehr schwierig. Leider konnte n_0 in den nichttrivialen Fällen $m \geq 2, p \geq 3$ nur für $m = 2, p = 3$ vollständig bestimmt werden, nämlich $n_0 = 3 < (m-1)(p-1)+2$. Als Hauptergebnis zu Frage (7.8) erhalten wir, daß für $m = 2$ und für jede Primzahl $p \geq 3$ $n_0 \leq p < (m-1)(p-1)+2$ sein muß. Wir geben im folgenden eine Zusammenstellung von bekannten Werten von n_0 bzw. von Abschätzungen für n_0 an.

(7.10)

a) Wie gerade erwähnt wurde, gilt stets $n_0 \leq (m-1)(p-1)+2$.

b) Für $p = 2$ ist n_0 schon lange bekannt, nämlich

$n_0 = m+1 = (m-1)(p-1)+2$. Dies zeigt folgendes Beispiel:

Wir können $F_{n,2}$ mit S^{n-1} und $\varphi_{n,2}$ mit $-id_{S^{n-1}}$ identifizieren (vgl. (7.2)). Es sei $n \leq m$. S^{n-1} kann dann als topologischer Unterraum von $\mathbb{R}^m$ aufgefaßt werden. Es sei

$h : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$. Dann gilt für alle $z \in F_{n,2} = S^{n-1}$:

$h(\varphi_{n,2}(z)) = h(-z) = -z \neq z = h(z)$.

c) Der Fall $m = 1$ ist trivial: Es ist $n_0 = 2 = (m-1)(p-1)+2$

für alle p , denn für $h : F_{1,p} = \{e^{i \frac{2\pi l}{p}} | l = 0, \dots, p-1\} \rightarrow \mathbb{R}^1$,

$h(e^{i \frac{2\pi l}{p}}) := l \frac{2\pi}{p}$, gilt offensichtlich $h(\varphi_{1,p}(z)) = h(e^{i \frac{2\pi}{p}} z) \neq h(z)$

für alle $z \in F_{1,p}$.

d) Für alle $p \geq 3, m \geq 2$ ist $n_0 \geq 2m-1$. Insbesondere ist also

für $p = 3$ $2m-1 \leq n_0 \leq (m-1)(p-1)+2 = 2m$, d.h. es ist

$n_0 = 2m-1$ oder $n_0 = 2m$. Die Abschätzung $n_0 \geq 2m-1$ folgt aus einem Beispiel von Cohen und Lusk (vg. [4], Example 3):

Für $p \geq 3$ und $m \geq 2$ sei $a := \cos \frac{2\pi}{p}$, $b := \sin \frac{2\pi}{p}$, $c := \frac{a-1}{b}$

und es sei $h: F_{2m-2,p} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$h(z_1, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots) := (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_{m-1}, \sum_{j=1}^{m-1} (\operatorname{Im} z_j - c \operatorname{Re} z_j)^2)$.

Es sei $z = (z_1, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots) \in F_{2m-2,p}$ mit $z_j = x_j + iy_j$,

$x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m-1$. Dann ist

$\varphi_{2m-2,p}(z) = (z'_1, \dots, z'_{m-1}, 0, 0, \dots)$ mit $z'_j := e^{\frac{2\pi i}{p}} z_j = x'_j + iy'_j$, wo-

bei $x'_j = ax_j - by_j$ und $y'_j = bx_j + ay_j$ für alle $j = 1, \dots, m-1$

gilt. Damit gilt $\|h(\varphi_{2m-2,p}(z)) - h(z)\|^2 = \sum_{j=1}^{m-1} (x'_j - x_j)^2 +$
 $+ (\sum_{j=1}^{m-1} [(y'_j - cx'_j)^2 - (y_j - cx_j)^2])^2 = \sum_{j=1}^{m-1} (x'_j - x_j)^2 +$
 $+ (\sum_{j=1}^{m-1} [(b(x_j + cy_j) + a(y_j - cx_j))^2 - (y_j - cx_j)^2])^2$.

Im Fall $\sum_{j=1}^{m-1} (x'_j - x_j)^2 > 0$ ist trivialerweise

$\|h(\varphi_{2m-2,p}(z)) - h(z)\| > 0$. Falls $\sum_{j=1}^{m-1} (x'_j - x_j)^2 = 0$ ist, so folgt

für alle $j = 1, \dots, m-1$ $x_j = x'_j = ax_j - by_j$, also $y_j = cx_j$,

und somit ist

$$\begin{aligned} \|h(\varphi_{2m-2,p}(z)) - h(z)\| &= \sum_{j=1}^{m-1} (b(x_j + cy_j))^2 = b^2 \sum_{j=1}^{m-1} (x_j + c^2 x_j)^2 = \\ &= b^2 (1+c^2) \sum_{j=1}^{m-1} (1+c^2) x_j^2 = b^2 (1+c^2) \sum_{j=1}^{m-1} (x_j^2 + (cx_j)^2) = \\ &= b^2 (1+c^2) \sum_{j=1}^{m-1} (x_j^2 + y_j^2) = b^2 (1+c^2) \|z\|^2 = b^2 (1+c^2) > 0. \end{aligned}$$

Also gilt $h(\varphi_{2m-2,p}(z)) \neq h(z)$ für alle $z \in F_{2m-2,p}$.

e) Für $m = 2$ und alle $p \geq 3$ ist $n_0 \leq p - (m-1)(p-1) + 2$. Diese

Abschätzung soll erst später bewiesen werden (Satz (7.13),

Seite 50). Wir werden zeigen, daß im Fall $p \geq 3$ zu jedem

stetigen $h: F_{p,p} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein $z \in F_{p,p}$ mit $h(z) = h(\varphi_{p,p}(z))$

existiert.

f) Aus d) und e) erhalten wir $n_0 = 3$ für $p = 3$, $m = 2$.

Zum Beweis von Satz (7.13) benötigen wir noch zwei Lemmata.

(7.11) Lemma.

Für alle $n \geq 3$ und alle p ist $F_{n,p}$ einfach zusammenhängend.

Beweis.

a) Für gerade $n \geq 3$ und beliebige Primzahlen p folgt die Behauptung wegen $F_{n,p} \cong S^{n-1}$.

b) Es sei nun $n \geq 3$ ungerade. Für diese n verzichten wir in der Definition von $F_{n,p}$ auf die Forderung, daß p Primzahl sei, d.h. wir betrachten Räume $F_{n,p}$, die gemäß (7.1) definiert sind, für alle ungeraden $n \geq 3$ und alle $p \in \mathbb{N}$. Der Nachweis, daß diese $F_{n,p}$ einfach zusammenhängend sind, erfolgt durch Induktion nach p .

Der Induktionsanfang $p = 1$ ist wegen

$F_{n,1} = \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}, 0, 0, \dots) \in l_2 \mid \|z\|=1, \arg z_{\frac{n+1}{2}} = 0\} \cong E^{n-1}$
trivial. Als Homöomorphismus kann man dabei die Abbildung
 $h_1 : F_{n,1} \rightarrow E^{n-1}, h_1(z) := (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_{\frac{n+1}{2}}, \operatorname{Im} z_{\frac{n+1}{2}})$
wählen.

Wir nehmen an, $F_{n,p}$ sei einfach zusammenhängend, und zeigen, daß dann auch $F_{n,p+1}$ einfach zusammenhängend ist. Dabei verwenden wir die folgende Aussage (vgl. etwa [10],

Exercise (4.12), Seite 16): Es sei X ein topologischer Raum, U, V seien offene und einfach zusammenhängende Teilmengen von X derart, daß $X = U \cup V$, $U \cap V \neq \emptyset$ und $U \cap V$ bogenzusammenhängend ist. Dann ist X einfach zusammenhängend.

Es sei nun

$A := \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}, 0, 0, \dots) \in F_{n,p+1} \mid \arg z_{\frac{n+1}{2}} \in \{k \frac{2\pi}{p+1} \mid k=0, \dots, p-1\}\}$,
es sei $w = (w_1, \dots, w_{\frac{n+1}{2}}, 0, 0, \dots) \in F_{n,p+1}$ mit $w_1 = \dots = w_{\frac{n-1}{2}} = 0$ und
 $w_{\frac{n+1}{2}} = e^{p \frac{2\pi}{p+1} i}$, $U := F_{n,p+1} \setminus \{w\}$ und

$V := \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{n-1}{2}}, 0, 0, \dots) \in F_{n,p+1} \mid \arg z_{\frac{n-1}{2}} = p \frac{2\pi}{p+1}\}.$

U, V sind offen in $F_{n,p+1}$, es gilt $U \cup V = F_{n,p+1}$ und wegen $V \cong \mathbb{E}^{n-1}$ ist V einfach zusammenhängend, wobei man als

Homöomorphismus die Abbildung $h_2 : V \rightarrow \mathbb{E}^{n-1}$,

$h_2(z) := (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_{\frac{n-1}{2}}, \operatorname{Im} z_{\frac{n-1}{2}})$ wählen kann. Durch

$h_3 := h_2|_{V \setminus \{w\}}$ wird ein Homöomorphismus

$h_3 : V \setminus \{w\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 0 < \|x\| < 1\}$ definiert, und folglich

ist $U \cap V = V \setminus \{w\}$ bogenzusammenhängend und nicht leer. Um

nachzuweisen, daß $F_{n,p+1}$ einfach zusammenhängend ist, ge-

nügt es zu zeigen, daß U einfach zusammenhängend ist. Nach

Induktionsannahme ist $F_{n,p}$ einfach zusammenhängend. Wegen

$A \cong F_{n,p}$ (mit Homöomorphismus $h_4 : A \rightarrow F_{n,p}$,

$h_4(z_1, \dots, z_{\frac{n-1}{2}}, z_{\frac{n-1}{2}}, 0, 0, \dots) :=$

$:= (z_1, \dots, z_{\frac{n-1}{2}}, e^{(p+1)\arg z_{\frac{n-1}{2}}(\frac{4}{p} - \frac{4}{p+1})i} z_{\frac{n-1}{2}}, 0, 0, \dots))$ ist dann

auch A einfach zusammenhängend. Wir zeigen, daß A Deforma-

tionsretrakt von U ist. Dann folgt, daß A und U homotopie-

äquivalent sind, und somit ist U einfach zusammenhängend.

Es sei $S := \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{n-1}{2}}, 0, 0, \dots) \in F_{n,p+1} \mid z_{\frac{n-1}{2}} = 0\}$ und

$B := (V \setminus \{w\}) \cup S$. A und B sind abgeschlossen in U und es

ist $A \cup B = U$. Wir definieren eine Retraktion $r : U \rightarrow A$ durch

$$r(z) = r(z_1, \dots, z_{\frac{n-1}{2}}, 0, 0, \dots) := \begin{cases} \frac{(z_1, \dots, z_{\frac{n-1}{2}}, 0, 0, \dots)}{\sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_{\frac{n-1}{2}}|^2}} & \text{für } z \in B \\ z & \text{für } z \in A. \end{cases}$$

Wegen $A \cap B = S$ ist r wohldefiniert und damit stetig. Als

nächstes konstruieren wir eine Homotopie $H : U \times [0, 1] \rightarrow U$

mit $H(., 0) = \operatorname{id}_U$ und $H(., 1) = j \circ r$, wobei $j : A \hookrightarrow U$.

Für $z \in A$ ist $r(z) = z \neq -z$. Für $z \in V \setminus \{w\}$ ist $r(z) \in S$ und

somit auch $-r(z) \in S$. Folglich ist $-r(z) \notin V \setminus \{w\}$, und daher gilt $-r(z) \neq z$. Es gilt also $r(z) \neq -z$ für alle $z \in A \cup (V \setminus \{w\}) = U$, woraus $tr(z) + (1-t)z \neq (0, 0, \dots)$ für alle $z \in U$, $t \in [0, 1]$ folgt. Damit ist für alle $z \in U$, $t \in [0, 1]$

$H(z, t) := \frac{tr(z) + (1-t)z}{\|tr(z) + (1-t)z\|} \in l_2$ wohldefiniert. Wir zeigen, daß für alle $z \in U$, $t \in [0, 1]$ $H(z, t) \in U$ ist. Für $z \in A$ ist dies klar wegen $H(z, t) = z$. Es sei nun

$z = (z_1, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}, 0, 0, \dots) \in V \setminus \{w\}$, $t \in [0, 1]$. Trivialerweise ist $\|H(z, t)\| = 1$ und für die $\frac{n+1}{2}$ -te Komponente $H(z, t)_{\frac{n+1}{2}}$

von $H(z, t)$ gilt $H(z, t)_{\frac{n+1}{2}} = \frac{(1-t)z_{\frac{n+1}{2}}}{\|tr(z) + (1-t)z\|}$. Folglich ist $\arg H(z, t)_{\frac{n+1}{2}} \in [0, p \frac{2\pi}{p+1}]$ und somit $H(z, t) \in F_{n, p+1}$. Wegen

$z \in V \setminus \{w\}$ gibt es ein $k \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ mit $z_k \neq 0$. Für die Komponente $H(z, t)_k$ von $H(z, t)$ gilt dann $H(z, t)_k =$

$$= \frac{1}{\|tr(z) + (1-t)z\| \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_{\frac{n+1}{2}}|^2}} [t + (1-t) \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_{\frac{n+1}{2}}|^2}] z_k \neq 0,$$

und daher ist $H(z, t) \neq w$. Damit haben wir gezeigt, daß H eine stetige Abbildung von $U \times [0, 1]$ in U ist. Trivialerweise gilt $H(., 0) = \text{id}_U$ und $H(., 1) = j \circ r$, und folglich ist A Deformationsretrakt von U .

(7.12) Lemma.

Es seien $f : S^1 \rightarrow S^1$, $u : E^2 \rightarrow R^2$ stetig. Es gelte $u(x) \neq 0$ für alle $x \in S^1$ und es sei $u(f(x)) \neq \lambda u(x)$ für alle $x \in S^1$ und für alle $\lambda > 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathring{E}^2$ mit $u(x) = 0$.

Beweis.

Wir identifizieren R^2 mit $\mathbb{C}$, E^2 mit $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, S^1 mit $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\mathring{E}^2$ mit $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Es sei $u_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$u_1 := u|_{S^1}$ und es sei $v : S^1 \rightarrow S^1$, $v(z) := \frac{u_1(z)}{|u_1(z)|}$. Mit $n(u_1, 0)$ bzw. $n(v, 0)$ bezeichnen wir die Windungszahlen der durch u_1 bzw. v definierten geschlossenen Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bzgl. 0. Wir zeigen, daß $n(u_1, 0) \neq 0$ ist, woraus die Behauptung folgt.

Durch $H(z, t) := (1-t)u_1(z) + tv(z)$ für $z \in S^1$, $t \in [0, 1]$ wird eine Homotopie $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert, die u_1 und v verbindet. Somit ist $n(u_1, 0) = n(v, 0)$, und es genügt, $n(v, 0) \neq 0$ zu zeigen.

Es sei $P : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $P(x) := e^{ix}$. Angenommen, es wäre $n(v, 0) = 0$. Dann kann v geliftet werden, d.h. es gibt ein stetiges $\hat{v} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $P \circ \hat{v} = v$. Es sei $S_+ := \{z \in S^1 \mid \hat{v}(z) - \hat{v}(f(z)) > 0\}$, $S_- := \{z \in S^1 \mid \hat{v}(z) - \hat{v}(f(z)) < 0\}$ und es seien $z_+, z_- \in S^1$ mit $\hat{v}(z_+) = \max_{z \in S^1} \hat{v}(z)$, $\hat{v}(z_-) = \min_{z \in S^1} \hat{v}(z)$. S_+ , S_- sind abgeschlossen, es gilt $S_+ \cup S_- = S^1$, und wegen $z_+ \in S_+$, $z_- \in S_-$ sind S_+ und S_- nicht leer. Da S^1 zusammenhängend ist, folgt $S_+ \cap S_- \neq \emptyset$, d.h. es gibt ein $z_0 \in S^1$ mit $\hat{v}(z_0) = \hat{v}(f(z_0))$. Folglich ist $v(z_0) = P(\hat{v}(z_0)) = P(\hat{v}(f(z_0))) = v(f(z_0))$ und $u_1(f(z_0)) = \frac{|u_1(f(z_0))|}{|u_1(z_0)|} u_1(z_0)$, im Widerspruch zu $u_1(f(z)) \neq \lambda u_1(z)$ für alle $z \in S^1$ und alle $\lambda > 0$. Also muß $n(v, 0) \neq 0$ sein.

(7.13) Satz.

Es sei $p \geq 3$ prim und es sei $h : \mathbb{F}_{p,p} \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig. Dann gibt es ein $z \in \mathbb{F}_{p,p}$ mit $h(z) = h(\varphi_{p,p}(z))$.

Beweis.

Es sei $h_1 : \mathbb{F}_{p,p} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h_1(z) := h(z) - h(\varphi_{p,p}(z))$. Für

$j = 2, \dots, p$ definieren wir rekursiv stetige Abbildungen $h_j: \mathbb{F}_{p,p} \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $h_j := h_{j-1} \cdot \varphi_{p,p}$. Wegen $\varphi_{p,p}^p = \text{id}_{\mathbb{F}_{p,p}}$ gilt dann für alle $z \in \mathbb{F}_{p,p}$ $\sum_{j=1}^p h_j(z) = 0$.

Es genügt nun zu zeigen: Es gibt ein $j \in \{1, \dots, p\}$ und ein $z \in \mathbb{F}_{p,p}$ mit $h_j(z) = 0$. Wir nehmen an, daß für alle $j \in \{1, \dots, p\}$ und für alle $z \in \mathbb{F}_{p,p}$ $h_j(z) \neq 0$ gilt, und führen diese Annahme zum Widerspruch.

Für $j \in \{1, \dots, p\}$ sei $j^{+} \in \{1, \dots, p\}$ bestimmt durch $j^{+} \equiv j + 1 \pmod{p}$ und es sei

$K := \{z \in \mathbb{F}_{p,p} \mid \text{Es gibt } j \in \{1, \dots, p\} \text{ und } \lambda > 0 \text{ mit } h_{j^{+}}(z) = \lambda h_j(z)\}$.

Wir zeigen zunächst: Es gibt eine kompakte, invariante

Teilmenge C_0 von $K_0 := \mathbb{F}_{p,p} \setminus K$ mit $g(C_0, \varphi_{p,p}) > 2$.

Hierzu sei für $z \in K$

$J(z) := \{j \in \{1, \dots, p\} \mid \text{Es gibt } \lambda > 0 \text{ mit } h_{j^{+}}(z) = \lambda h_j(z)\}$ und

für $n = 1, \dots, p-2$ sei $K_n := \{z \in \mathbb{F}_{p,p} \mid \text{card } J(z) = n\}$.

Behauptung:

a) $\bigcup_{n=1}^{p-2} K_n = K$.

b) K_n ist invariant unter $\varphi_{p,p}$, $n = 1, \dots, p-2$.

c) $g(K_n, \varphi_{p,p}) \leq 1$, $n = 1, \dots, p-2$.

d) $\bigcup_{r=1}^s K_{p-1-r}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{F}_{p,p}$ für alle $s=1, \dots, p-2$.

Zu a): Es genügt zu zeigen, daß es für alle $z \in \mathbb{F}_{p,p}$

höchstens $p-2$ verschiedene $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, p\}$ geben kann

mit $h_{j_r^{+}}(z) = \lambda_{j_r} h_{j_r}(z)$, $\lambda_{j_r} > 0$, für $r = 1, \dots, k$. Angenommen,

für ein $z \in \mathbb{F}_{p,p}$ gäbe es paarweise verschiedene

$j_1, \dots, j_{p-1} \in \{1, \dots, p\}$ mit $h_{j_r^{+}}(z) = \lambda_{j_r} h_{j_r}(z)$, $\lambda_{j_r} > 0$, für

$r = 1, \dots, p-1$. Durch eventuelles Umnummerieren können wir

erreichen, daß $j_{r+1} = j_r^{+}$ gilt für $r = 1, \dots, p-2$. Sei noch

$j_p := j_{p-1}^{+}$. Dann ist $\{j_1, \dots, j_p\} = \{1, \dots, p\}$ und somit ist

$h_{j_1}(z) + \dots + h_{j_p}(z) = 0$. Andererseits wäre aber

$$\begin{aligned} h_{j_1}(z) + h_{j_2}(z) + h_{j_3}(z) + \dots + h_{j_p}(z) &= \\ &= h_{j_1}(z) + \lambda_{j_1} h_{j_1}(z) + \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} h_{j_1}(z) + \dots + \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_{p-1}} h_{j_1}(z) = \\ &= (1 + \lambda_{j_1} + \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} + \dots + \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_{p-1}}) h_{j_1}(z) \neq 0 \text{ wegen } \lambda_{j_r} > 0 \\ &\text{für alle } r = 1, \dots, p-1 \text{ und } h_{j_1}(z) \neq 0. \end{aligned}$$

b) folgt aus der Äquivalenz $h_{j+}(z) = \lambda h_j(z) \Leftrightarrow$

$$h_{(j-)+}(\varphi_{p,p}(z)) = \lambda h_{j-}(\varphi_{p,p}(z)) \quad (z \in F_{p,p}, j \in \{1, \dots, p\}, \lambda > 0).$$

Zu c): Für $n = 1, \dots, p-2$ sei $M_n := \{I \subset \{1, \dots, p\} \mid \text{card } I = n\}$.

M_n werde mit der diskreten Topologie versehen. Wir definie-

ren $\varphi: M_n \rightarrow M_n$ durch $\varphi(\{i_1, \dots, i_n\}) := \{i_1^-, \dots, i_n^-\}$ für

$\{i_1, \dots, i_n\} \in M_n$. Wegen $n < p$ gilt $\varphi(I) \neq I$ für alle $I \in M_n$,

und offensichtlich ist $\varphi^p = \text{id}_{M_n}$, d.h. φ ist freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion

auf M_n . Durch die Zuordnung $z \mapsto J(z)$, $z \in K_n$, wird eine Ab-

bildung $J: K_n \rightarrow M_n$ definiert. Es gilt

$$\bigcup_{I \in M_n} J^{-1}(\{I\}) = J^{-1}(M_n) = K_n. \text{ Für alle } I \in M_n \text{ ist } J^{-1}(\{I\})$$

zudem abgeschlossen in K_n : Es sei $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in

$J^{-1}(\{I\})$ mit $z_m \rightarrow z \in K_n$, $m \rightarrow \infty$. Dann gilt für alle $j \in I$

und $m \in \mathbb{N}$ $h_{j+}(z_m) = \lambda_{j,m} h_j(z_m)$ mit $\lambda_{j,m} > 0$. Es bezeichne

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$. Wir erhalten

$$\langle h_{j+}(z_m), h_j(z_m) \rangle = \lambda_{j,m} \langle h_j(z_m), h_j(z_m) \rangle = \lambda_{j,m} \|h_j(z_m)\|^2 \text{ und}$$

$$\text{somit } 0 < \lambda_{j,m} = \frac{\langle h_{j+}(z_m), h_j(z_m) \rangle}{\|h_j(z_m)\|^2} \rightarrow \frac{\langle h_{j+}(z), h_j(z) \rangle}{\|h_j(z)\|^2} =: \lambda_j$$

für $m \rightarrow \infty$, $j \in I$. Trivialerweise ist $\lambda_j > 0$ für alle $j \in I$.

Aus $h_{j+}(z_m) = \lambda_{j,m} h_j(z_m)$ folgt für $m \rightarrow \infty$

$h_{j+}(z) = \lambda_j h_j(z)$ für alle $j \in I$. Wegen $h_{j+}(z) \neq 0$

ist $\lambda_j > 0$, $j \in I$. Wegen $z \in K_n$ folgt nun $z \in J^{-1}(\{I\})$.

Trivialerweise ist $J|_{J^{-1}(\{I\})}$ stetig für alle $I \in M_n$ und somit ist J stetig. Offensichtlich ist J zudem äquivariant.

Nach Hilfssatz (3.4) und (3.1) gilt nun

$$g(K_n, \varphi_{p,p}) \leq g(M_n, \varphi) \leq 1.$$

Zu d) Es sei $s \in \{1, \dots, p-2\}$ und es sei $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\bigcup_{r=1}^s K_{p-1-r} = \bigcup_{r=1}^s \bigcup_{I \in M_{p-1-r}} J^{-1}(\{I\})$ mit $z_m \rightarrow z \in F_{p,p}$, $m \rightarrow \infty$. Es gibt ein $r \in \{1, \dots, s\}$ und ein $I \in M_{p-1-r}$ mit $z_m \in J^{-1}(\{I\})$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$, d.h. es gibt eine Teilfolge $(z_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $z_{m_k} \in J^{-1}(\{I\})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wie beim Beweis der Abgeschlossenheit der Mengen $J^{-1}(\{I\})$ in K_n zeigt man nun, daß es für alle $j \in I$ ein $\lambda_j > 0$ gibt mit $h_{j+}(z) = \lambda_j h_j(z)$, woraus $z \in \bigcup_{r=1}^s K_{p-1-r}$ folgt. Aus d) folgt insbesondere, daß $\bigcup_{r=1}^s K_{p-1-r}$ abgeschlossen in K ist für alle $s = 1, \dots, p-2$. Damit gilt nach Hilfssatz (3.3) und c) für $K = \bigcup_{r=1}^{p-2} K_{p-1-r}$ $k := g(K, \varphi_{p,p}) \leq \sum_{r=1}^{p-2} g(K_{p-1-r}, \varphi_{p,p}) \leq p-2$. Nach Definition von k gibt es $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{C}(K, \varphi_{p,p})$ mit $\bigcup_{i=1}^k A_i = K$. Da $K = \bigcup_{r=1}^{p-2} K_{p-1-r}$ abgeschlossen in $F_{p,p}$ ist, gilt sogar $A_i \in \mathcal{C}(F_{p,p}, \varphi_{p,p})$ für alle $i = 1, \dots, k$. Nach Hilfssatz (3.2b) gibt es zu A_i eine offene, invariante Umgebung W_i mit $\overline{W_i} \in \mathcal{C}(F_{p,p}, \varphi_{p,p})$, $i = 1, \dots, k$. Es sei $W := \bigcup_{i=1}^k W_i \supset K$ und $C_0 := F_{p,p} \setminus W \subset F_{p,p} \setminus K = K_0$. Wegen der Invarianz der W_i ist W und somit auch C_0 invariant unter $\varphi_{p,p}$. C_0 ist abgeschlossen im kompakten Raum $F_{p,p}$, also kompakt. Wegen $F_{p,p} = (F_{p,p} \setminus W) \cup W \subset C_0 \cup \bigcup_{i=1}^k \overline{W_i} \subset F_{p,p}$ ist $F_{p,p} = C_0 \cup \bigcup_{i=1}^k \overline{W_i}$, und somit gilt nach Hilfssatz (3.3) und Lemma (7.3) und wegen $\overline{W_i} \in \mathcal{C}(F_{p,p}, \varphi_{p,p})$ für $i = 1, \dots, k$

$$p = g(F_{p,p}, \varphi_{p,p}) \leq g(C_0, \varphi_{p,p}) + \sum_{i=1}^k g(\overline{W_i}, \varphi_{p,p}) \leq g(C_0, \varphi_{p,p}) + k \leq g(C_0, \varphi_{p,p}) + p - 2, \text{ also } g(C_0, \varphi_{p,p}) \geq 2.$$

Da C_0 kompakt und $g(C_0, \varphi_{p,p}) > 1$ ist, gibt es nach Hilfssatz (3.5) eine Zusammenhangskomponente Z_0 von C_0 mit $Z_0 \cap \varphi_{p,p}(Z_0) \neq \emptyset$. Z_0 ist insbesondere zusammenhängende Teilmenge von K_0 , und daher gibt es eine Zusammenhangskomponente Z von K_0 mit $Z_0 \subset Z$. Wegen $\emptyset \neq Z_0 \cap \varphi_{p,p}(Z_0) \subset Z \cap \varphi_{p,p}(Z)$ und da $\varphi_{p,p}(Z)$ zusammenhängend und Z Komponente ist, gilt $\varphi_{p,p}(Z) \subset Z$, also ist Z invariant unter $\varphi_{p,p}$. $F_{p,p}$ ist lokal bogenzusammenhängend und $K_0 = F_{p,p} \setminus K$ ist offen in $F_{p,p}$. Daher ist auch K_0 lokal bogenzusammenhängend und somit ist die Komponente Z auch Bogenkomponente von K_0 . Insbesondere ist Z 0-zusammenhängend. Nach Satz (7.7) gibt es daher eine äquivariante Abbildung $P : F_{2,p} \rightarrow Z$. Wir identifizieren nun $F_{2,p}$ mit S^1 . Nach Lemma (7.11) ist $F_{p,p}$ einfach zusammenhängend, und folglich gibt es eine stetige Fortsetzung $\tilde{P} : E^2 \rightarrow F_{p,p}$ von $j \circ P$ (mit $j : Z \hookrightarrow F_{p,p}$). Es sei $u := h_1 \circ \tilde{P} : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Für alle $x \in S^1$ ist $u(x) = h_1(\tilde{P}(x)) \neq 0$, und ferner gilt für alle $x \in S^1$ und $\lambda > 0$ wegen $P(x) \in Z \subset K_0 = F_{p,p} \setminus K$

$$u(\varphi_{2,p}(x)) = h_1(\tilde{P}(\varphi_{2,p}(x))) = h_1(P(\varphi_{2,p}(x))) = h_1(\varphi_{p,p}(P(x))) =$$

$$= h_2(P(x)) + \lambda h_1(\tilde{P}(x)) = \lambda h_1(\tilde{P}(x)) = \lambda u(x).$$
Nach Lemma (7.12) gibt es daher ein $x \in E^2$ mit $u(x) = 0$. Mit $z := \tilde{P}(x) \in F_{p,p}$ gilt dann $h_1(z) = h_1(\tilde{P}(x)) = u(x) = 0$, im Widerspruch zur ursprünglichen Annahme $h_j(z) \neq 0$ für alle $j \in \{1, \dots, p\}$, $z \in F_{p,p}$. Damit ist die Existenz eines $z \in F_{p,p}$ mit $h(z) = h(\varphi_{p,p}(z))$ bewiesen.

Wir wollen nun noch kurz auf eine schwächere Variante von Frage (7.8) eingehen. Betrachtet man anstelle von (7.8) die abgeschwächte Frage

(7.8') Welches ist der kleinste Wert n_1 , so daß es für jedes stetige $h : F_{n_1, p} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^m$ ein $z \in F_{n_1, p}$ und ein $j \in \{1, \dots, p-1\}$ mit $h(z) = h(\varphi_{n_1, p}^j(z))$ gibt?, so läßt sich - wenn auch nur für $m = 2$ - ein schärferes Resultat als die zu (7.8) im entsprechenden Fall erhaltene Abschätzung $3 \leq n_0 \leq p$ erzielen. Hierzu verhilft ein Satz von Connett [7]. In [7] Theorem 1 wird gezeigt, daß für jeden einfach zusammenhängenden (Hausdorff-) Raum M , für jede freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f auf M und für jedes stetige $h : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein $x \in M$ und ein $j \in \{1, \dots, p-1\}$ mit $h(x) = h(f^j(x))$ existiert. Da nach (7.11) die $F_{n, p}$ für alle $n \geq 3$ und für alle p einfach zusammenhängend sind, erhalten wir $n_1 \leq 3$. Andererseits gilt für $h : F_{2, p} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ (wir identifizieren wieder $F_{2, p}$ mit S^1) trivialerweise $h(z) \neq h(\varphi_{2, p}^j(z))$ für alle $z \in F_{2, p}$ und $j \in \{1, \dots, p-1\}$ (p beliebig). Somit ist $n_1 \geq 3$, also $n_1 = 3$ für alle p . Auf den Fall $m > 2$ lassen sich die Methoden von [7] - wenn überhaupt - nicht ohne wesentliche Modifikationen übertragen, vgl. hierzu den Beweis von Theorem 1 [7] und Theorem 7,8 in [9].

Kapitel IV

In diesem Kapitel soll zunächst ein Zusammenhang zwischen Homologie und Geschlecht eines Raumes in Form einer Abschätzung des Geschlechts nach unten hergeleitet werden. Mit Hilfe dieses Zusammenhangs und der Sätze (5.4) und (5.5) können wir dann Resultate von Cohen, Lusk und Munkholm in den Rahmen der Theorie des Geschlechts eines Raumes einordnen und teilweise sogar verallgemeinern.

8. Homologie und Geschlecht eines Raumes.

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis der folgenden Aussage:

(8.1) Satz (vgl. [24], Korollar 2 und Bemerkung zu Theorem 17, Seite 103, und [23], Korollar 2 zu Theorem 3).

Es sei $M \neq \emptyset$ ein separierter bogenzusammenhängender Raum, p prim, $f : M \rightarrow M$ freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion, $N \in \mathbb{N}$. $g'(M, f)$ sei definiert und es gelte $H_q(M; \mathbb{Z}_p) = 0$ für $0 < q < N$. Dann ist $g'(M, f) > N$.

(8.2) Bemerkung.

- a) Für $N = 1$ ist (8.1) trivial, denn aus M bogenzusammenhängend folgt trivialerweise $g'(M, f) > 1$. Im folgenden kann also o.B.d.A. $N > 2$ angenommen werden.
- b) Das folgende triviale Beispiel zeigt, daß die Voraussetzung des Bogenzusammenhangs von M wesentlich ist: Es sei $p = 2$, $M := S^0$, $f := -\text{id}_{S^0}$. Trivialerweise ist $S^0 \in \mathcal{Q}(S^0, f)$, also gilt $g'(S^0, f) = g(S^0, f) = 1$. Würde (8.1) auch für nicht bogenzusammenhängende Räume M gelten, so müßte nach (8.1) wegen $H_q(S^0; \mathbb{Z}_2) = 0$ für alle $q > 0$ $g'(S^0, f) = \infty$ sein.

(8.3) Bemerkung.

Für normale Räume M wird (8.1) in [24] (Korollar 2 und Bemerkung zu Theorem 17) bewiesen, wobei es vermutlich ge-

nügen würde, anstelle der Normalität von M zu fordern, daß das Geschlecht von M bezüglich der auf M operierenden Gruppe existieren soll. Eine Version von (8.1) für metrische Räume ist schon in [23] (Korollar 2 zu Theorem 3) erschienen. Zum Beweis von Theorem 17 in [24] bzw. von Theorem 3 in [23] wird als wesentliches Hilfsmittel ein Konzept der homologischen Algebra, sogenannte Spektralsequenzen (siehe etwa [18], Chapter XI, oder [21], Chapter 9), verwendet. In der vorliegenden Arbeit soll die Korollar 1 zu Theorem 17 [24] bzw. Korollar 1 zu Theorem 3 [23] entsprechende Aussage (8.6) mit möglichst elementaren Mitteln bewiesen werden, wobei wir uns einer Methode bedienen werden, die von H. Hopf in [11] in anderem Zusammenhang entwickelt wurde.

Der Beweis von (8.1) ist ziemlich lang. Es soll daher zunächst ein Überblick über die einzelnen Beweisschritte gegeben werden. (8.1) wird in drei Schritten bewiesen. Wir zeigen:

(8.4) Lemma.

Es sei $M \neq \emptyset$ ein separierter bogenzusammenhängender Raum, f sei freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf M . Der Raum S mit freier $\mathbb{Z}_p$ -Aktion φ sei wie in (7.5) definiert, und es sei $Q : M \rightarrow S$ äquivariant. Es sei $M' := M/\mathbb{Z}_p$, $S' := S/\mathbb{Z}_p$, $P_1 : M \rightarrow M'$, $P_2 : S \rightarrow S'$ seien die kanonischen Projektionen (vgl. (1.10)), $\hat{Q} : M' \rightarrow S'$ sei die von Q induzierte stetige Abbildung, d.h. es ist $\hat{Q}(P_1(x)) = P_2(Q(x))$ für alle $x \in M$. Es sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, und es gelte $H_q(M; \mathbb{Z}_p) = 0$ für $0 < q < N$. Dann ist $\hat{Q}_* : H_N(M'; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_N(S'; \mathbb{Z}_p)$ surjektiv.

(8.5) Lemma.

Für alle $q \geq 0$ ist $H_q(S'; \mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_p$.

Aus (8.4) und (8.5) folgt trivialerweise

(8.6). $\hat{Q}_* : H_N(M'; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_N(S'; \mathbb{Z}_p)$ ist nicht der Nullhomomorphismus.

Zum Beweis von (8.1) benötigen wir noch

(8.7) Lemma.

Es sei $F'_{n,p} := F_{n,p}/Z_p$. Dann ist $H_q(F'_{n,p}; Z_p) = 0$ für alle $q \gg n$.

Aus (8.6), (8.7) und Satz (7.4) läßt sich nun (8.1) sehr leicht herleiten:

Angenommen, es wäre $g'(M, f) \leq N$. Nach Satz (7.4) gibt es dann eine äquivalente Abbildung $a : M \rightarrow F_{N,p}$. Es sei $i : F_{N,p} \hookrightarrow S$ und wir setzen $Q := i \circ a : M \rightarrow S$. Q ist äquivalent, und nach (8.6) ist der von Q induzierte Homomorphismus $\hat{Q}_* : H_N(M'; Z_p) \rightarrow H_N(S'; Z_p)$ nichttrivial. Es seien $\hat{a}, \hat{i}$ die von a bzw. i induzierten stetigen Abbildungen $M' \rightarrow F_{N,p}$ bzw. $F_{N,p} \rightarrow S'$. Offensichtlich gilt $\hat{Q} = \hat{i} \circ \hat{a} = \hat{i} \circ \hat{a}$ und somit auch $\hat{Q}_* = \hat{i}_* \circ \hat{a}_*$ mit $\hat{a}_* : H_N(M'; Z_p) \rightarrow H_N(F'_{N,p}; Z_p)$ und $\hat{i}_* : H_N(F'_{N,p}; Z_p) \rightarrow H_N(S'; Z_p)$. Nach (8.7) ist $H_N(F'_{N,p}; Z_p) = 0$, woraus $\hat{Q}_* = 0$ folgt. Widerspruch.

(8.8) Bemerkung.

Es seien M, f wie in (8.1) und es gelte $g'(M, f) \leq \infty$ (abzählbar unendlich). Nach (7.5) existiert eine äquivalente Abbildung $Q : M \rightarrow S$ und je zwei solche Abbildungen Q_1, Q_2 lassen sich durch eine äquivalente Homotopie F verbinden. F induziert eine Homotopie $\hat{F} : M' \times [0, 1] \rightarrow S'$, die $\hat{Q}_1$ und $\hat{Q}_2$ verbindet, und folglich gilt $\hat{Q}_{1*} = \hat{Q}_{2*} : H_q(M'; Z_p) \rightarrow H_q(S'; Z_p)$ für alle $q \geq 0$. Damit ist folgende Definition sinnvoll:
 $v(M, f) := \sup \{ q \in \mathbb{N}_0 \mid \hat{Q}_* : H_q(M'; Z_p) \rightarrow H_q(S'; Z_p) \text{ ist nichttrivial} \}$.
 (Man beachte, daß $\hat{Q}_* : H_0(M'; Z_p) \rightarrow H_0(S'; Z_p)$ stets nichttrivial ist.) Wir setzen noch $h'(M, f) := v(M, f) + 1$. Genauso wie in der obigen Herleitung von (8.1) aus (8.6), (8.7) und (7.4) zeigt man, daß für alle $q \gg g'(M, f)$ $\hat{Q}_* = \hat{i}_* \circ \hat{a}_* : H_q(M'; Z_p) \rightarrow H_q(S'; Z_p)$ trivial ist (wobei

$a : M \rightarrow F_{q,p}$ äquivariant und $i : F_{q,p} \hookrightarrow S$ ist), woraus im Fall $g'(M,f) < \infty$ $v(M,f) < g'(M,f)$ folgt. Im Fall $g'(M,f) = \infty$ ist $v(M,f) < g'(M,f)$, und somit in jedem Fall $h'(M,f) \leq g'(M,f)$.

(8.6) besagt gerade, daß $v(M,f) \geq N$ bzw. $h'(M,f) > N$ ist. Den Zahlen $v(M,f)$ bzw. $h'(M,f)$ entsprechende Konzepte werden in [26], [4], [5], [16] und [24] eingeführt ("index" in [26] ($p=2$), "mod p Smith index" in [16], "weak homological genus" in [24], Definition 17). Dabei wird in [4], [5], [16], [24] anstelle von Homologie Kohomologie verwendet, anstelle von S , φ werden andere Räume mit freien Z_p -Aktionen benutzt.

Zum Beweis von (8.4) und (8.5) benötigen wir einige algebraische Definitionen und Aussagen, die wir dann auf die singulären Ketten topologischer Räume anwenden. Unter einem Ring verstehen wir im folgenden stets einen nicht notwendig kommutativen Ring mit Einselement 1 (oft auch geschrieben als 1_J , 1_R wenn wir verschiedene Ringe betrachten), unter einem Modul X über einem Ring R verstehen wir stets einen unitären R -Linksmodul, d.h. es gelte $1_R x = x$ für alle $x \in X$.

Eine Bemerkung zur Schreibweise von Summen: Im folgenden werden sehr häufig Summen von Elementen eines Ringes R bzw. Linearkombinationen aus Elementen von R und Elementen eines R -Moduls X auftreten. Dabei wird es sich stets um endliche Summen handeln, und wir schreiben kurz ($S \in R$, $E \in X$)

$\sum_{s \in S} s, \sum_{r \in R, s \in S} r s, \sum_{x \in E} r_x x$ ($r_x \in R$) oder ähnlich, wenn klar ist, über welchen Bereich summiert wird, auch $\sum s, \sum r s, \sum r_x x$.

Summen der angegebenen Form können auch so aufgefaßt werden, daß fast alle Ringelemente gleich Null sein sollen.

Ferner sei $\sum_{\emptyset} := 0$.

(8.9) Definition (vgl. [11], 1.6.).

Es sei J ein Ring, J_0 ein Linksideal von J , X ein J -Modul, Z ein J -Untermodul von X . Dann sei

$$Z^0 := \left\{ \sum u_z z \mid z \in Z, u_z \in J_0 \text{ fast alle Null} \right\}.$$

(8.10) Bemerkung.

- a) Z^0 ist J -Untermodul von X . Ferner ist offensichtlich $Z^0 \subset X^0$, und da Z J -Modul ist, ist $Z^0 \subset Z$, also gilt $Z^0 \subset X^0 \cap Z$. Damit ist der J -Modul $(X^0 \cap Z)/Z^0$ wohldefiniert.
- b) Für einen freien J -Modul X mit Basis T und für ein zweiseitiges Ideal J_0 von J ist offensichtlich $X^0 = \left\{ \sum_{t \in T} u_t t \mid u_t \in J_0 \text{ fast alle Null} \right\}$.

Das folgende Lemma ist eine geringfügige Modifizierung von Satz I in [11]. Der Beweis wird im Anhang ausgeführt.

(8.11) Lemma.

Es sei J ein Ring, J_0 ein Linksideal von J , R ein J -Modul.

Es sei $N \in \mathbb{N}_0$. X_n, Y_n seien freie J -Moduln, $0 \leq n \leq N$,

$d_n : X_n \rightarrow X_{n-1}, d'_n : Y_n \rightarrow Y_{n-1}$ ($1 \leq n \leq N$), $d_0 : X_0 \rightarrow R$,

$d'_0 : Y_0 \rightarrow R$ seien J -Homomorphismen und es sei $Z_n := \text{Ker } d_n$,

$Z'_n := \text{Ker } d'_n$, $0 \leq n \leq N$. Die Sequenzen

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{d_0} X_0 \xleftarrow{d_1} X_1 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_{N-1}} X_{N-1} \xleftarrow{d_N} X_N,$$

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{d'_0} Y_0 \xleftarrow{d'_1} Y_1 \xleftarrow{d'_2} \dots \xleftarrow{d'_{N-1}} Y_{N-1} \xleftarrow{d'_N} Y_N \text{ seien exakt.}$$

Dann gilt:

- a) Es gibt J -Homomorphismen $Q_n : X_n \rightarrow Y_n$ ($0 \leq n \leq N$) derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} & d_0 & d_1 & d_2 & & d_{N-1} & d_N & & & & \\ R & \xleftarrow{\quad} & X_0 & \xleftarrow{\quad} & X_1 & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{\quad} & X_{N-1} & \xleftarrow{\quad} & X_N \\ \downarrow \text{id}_R & & \downarrow Q_0 & & \downarrow Q_1 & & & & \downarrow Q_{N-1} & & \downarrow Q_N \\ R & \xleftarrow{d'_0} & Y_0 & \xleftarrow{d'_1} & Y_1 & \xleftarrow{d'_2} & \dots & \xleftarrow{d'_{N-1}} & Y_{N-1} & \xleftarrow{d'_N} & Y_N \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{kommutativ} \\ \text{ist.} \end{array}$$

b) Jede solche Familie $\{Q_n\}_{n=0,\dots,N}$ von J -Homomorphismen induziert Isomorphismen $\bar{Q}_n : (X_n^0 \cap Z_n)/Z_n^0 \rightarrow (Y_n^0 \cap Z_n')/Z_n'^0$ durch die Festsetzung $\bar{Q}_n(z+Z_n^0) := Q_n z + Z_n'^0$, $z \in X_n^0 \cap Z_n$, $n = 0, \dots, N$.

c) Die Moduln $(X_n^0 \cap Z_n)/Z_n^0$ sind also bis auf Isomorphie durch R , J , J_0 bestimmt, d.h. unabhängig von der speziellen Wahl von X_n , d_n , $n = 0, \dots, N$.

(8.12) Definition.

Es sei R ein Ring, G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe mit neutralem Element e . Es sei J der von G erzeugte freie R -Modul, d.h. es ist $J = \{\sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in R \text{ fast alle Null}\}$. In J ist eine Addition erklärt durch

$(\sum_{g \in G} r_g g) + (\sum_{g \in G} r'_g g) := \sum_{g \in G} (r_g + r'_g) g$. Die Verknüpfung in G induziert eine Multiplikation in J , nämlich

$$(\sum_{g \in G} r_g g) \cdot (\sum_{g' \in G} r'_g g') := \sum_{g, g' \in G} (r_g r'_g) (gg').$$

Mit der so definierten Addition und Multiplikation wird J zu einem Ring. J heißt Gruppenring von G mit Koeffizienten aus R . Das Element $1_J := 1_R e$ ist Einselement von J . Es sei $\varepsilon : J \rightarrow R$, $\varepsilon(\sum r_g g) := \sum r_g$. ε ist ein Ringepimorphismus, und somit ist insbesondere $J_0 := \text{Ker } \varepsilon$ ein zweiseitiges Ideal von J .

(8.13) Definition.

a) Es seien R , G wie in (8.12). X sei ein R -Modul. G operiert auf X wenn gilt: Jedem $g \in G$, $x \in X$ ist ein Element $gx \in X$ zugeordnet, so daß gilt: $g(x+y) = gx+gy$, $g(rx) = r(gx)$, $(gh)x = g(hx)$, $ex = x$ für alle $x, y \in X$, $r \in R$, $g, h \in G$. G ist also eine Gruppe von R -Automorphismen von X .

b) G operiert trivial auf X , wenn $gx = x$ für alle $g \in G$, $x \in X$ gilt.

c) Zu J , G sei J gemäß (8.12) definiert. Für $u = \sum_{g \in G} r_g g \in J$ und $x \in X$ sei $ux := \sum_{g \in G} r_g (gx)$. Dadurch wird eine J -Multiplikation auf X definiert. Mit dieser Multiplikation wird X zu einem J -Modul. Wenn G auf X trivial operiert, so ist $ux = \sum_{g \in G} r_g x = (\sum_{g \in G} r_g)x = (\varepsilon u)x$.

(8.14) Bemerkungen.

a) Es seien X, Y R -Moduln, auf denen G operiert. X, Y werden im Sinne von (8.13c) als J -Moduln aufgefaßt. Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein R -Homomorphismus und f sei äquivariant, d.h. es gelte $fg = gf$ für alle $g \in G$. Dann ist f auch ein J -Homomorphismus.

b) Es sei Z ein R -Untermodul von X und Z sei invariant unter G , d.h. es gelte $gZ \subset Z$ für alle $g \in G$. Dann ist Z auch ein J -Untermodul von X . Es seien X^0, Z^0 gemäß (8.9) definiert, mit J_0 wie in (8.12). Nach (8.10a) ist dann der J -Modul $(X^0 \cap Z)/Z^0$ wohldefiniert.

c) Es sei V ein J -Untermodul von X , W ein J -Untermodul von Y , $f : X \rightarrow Y$ und $F : X/V \rightarrow Y/W$ seien J -Homomorphismen. Wegen $rx = r(ex) = (re)x$ und analog $ry = (re)y$ für alle $r \in R$, $x \in X$, $y \in Y$ sind V, W R -Untermoduln von X bzw. Y , $Y/W, X/V$ sind R -Moduln und f, F sind R -Homomorphismen. Somit sind auch $X^0, V^0, X^0 \cap V, Y^0, W^0, Y^0 \cap W, (X^0 \cap V)/V^0, (Y^0 \cap W)/W^0$ R -Moduln, und J -Homomorphismen $(X^0 \cap V)/V^0 \rightarrow (Y^0 \cap W)/W^0$ können als R -Homomorphismen aufgefaßt werden.

Im folgenden betrachten wir topologische Räume, auf denen eine Gruppe von topologischen Selbstabbildungen operiert.

(8.15) Definitionen, Bezeichnungen.

a) Es sei X ein topologischer Raum, R ein Ring, der im folgenden als fest gewählt betrachtet werden soll. Mit X_n , $n \in \mathbb{N}_0$, bezeichnen wir die Moduln der singulären n -Ketten von X mit Koeffizienten aus R . $\partial_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$, $n \geq 1$, sei der Randoperator, $\partial_0 : X_0 \rightarrow R$ der Randoperator im Sinne der reduzierten Homologietheorie, d.h. $\partial_0(\sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma) := \sum_{\sigma} r_{\sigma}$ ($r_{\sigma} \in R$ fast alle Null, σ durchlaufe die Menge der singulären 0-Simplexe), es sei $Z_n(X) := \text{Ker } \partial_n$, $B_n(X) := \text{Im } \partial_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Mit $H_n(X)$, $n \in \mathbb{N}_0$, bezeichnen wir die singulären Homologiemoduln mit Koeffizienten aus R , $\tilde{H}_0(X) = Z_0(X)/B_0(X)$ sei der 0-te Homologiemodul im Sinne der reduzierten Theorie. Für Räume X, Y und $f : X \rightarrow Y$ stetig seien $f_{\#} : X_n \rightarrow Y_n$, $f_{*} : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, die von f induzierten R -Homomorphismen.

b) Es sei G eine Gruppe von Homöomorphismen $g : X \rightarrow X$. Mit X/G oder kurz X' bezeichnen wir den Raum, der aus X entsteht, wenn jeweils die Punkte gx , $g \in G$, identifiziert werden ($x \in X$). $P : X \rightarrow X'$ sei die kanonische Projektion (vgl. (1.10)).

c) Es sei G wie oben, J, J_0 seien im folgenden stets gemäß (8.12) definiert. Für $g \in G$, $c \in X_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) setzen wir $gc := g_{\#}c$. Dadurch wird eine Operation von G auf X_n im Sinne von (8.13a) definiert, und X_n wird zum J -Modul im Sinne von (8.13c).

(8.16) Bemerkungen.

a) Es sei G eine Gruppe von Homöomorphismen eines Raumes X auf sich und G operiere eigentlich diskontinuierlich, d.h. zu jedem $x \in X$ gebe es eine Umgebung U von x mit $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G$, $g \neq \text{id}_X$. Dann ist $P : X \rightarrow X'$ eine Überlagerung (vgl. [21], Chap. 2, Sec. 6, Theorem 7).

Es sei speziell f eine freie Z_p -Aktion auf einem Hausdorff-

Raum X . Dann operiert die von f erzeugte Gruppe Z_p eigentlich diskontinuierlich auf X .

b) X, Y seien Räume, auf denen dieselbe Gruppe G operiert.

(Genauer: G sei eine Gruppe von Homöomorphismen $X \rightarrow X$,

$\tilde{G}$ eine dazu isomorphe Gruppe von Homöomorphismen $Y \rightarrow Y$.

$\pi: G \rightarrow \tilde{G}$ sei ein Isomorphismus. Die Gruppenelemente $g \in G$

und $\pi g \in \tilde{G}$ werden identifiziert, und wir schreiben ebenfalls

g anstatt πg .) $Q: X \rightarrow Y$ sei äquivariant, d.h. Q ist stetig

und es gilt $Q \circ g = g \circ Q$ für alle $g \in G$. Nach Definition der

Operation von G auf $X_n, Y_n, n \in \mathbb{N}_0$, gilt dann

$$Q_* g = Q_* g_* = (Q \circ g)_* = (g \circ Q)_* = g_* Q_* = g Q_*, g \in G, \text{ d.h.}$$

$Q_*: X_n \rightarrow Y_n$ ist äquivariant. Nach (8.14a) ist Q_* somit

ein J -Homomorphismus.

c) G operiere auf dem Raum X . Für $n \geq 1$ gilt dann

$$\partial_n g = \partial_n g_* = g_* \partial_n = g \partial_n. R \text{ werde - auch im folgenden -}$$

mit der trivialen Gruppenoperation gemäß (8.13b) versehen.

R wird dadurch zum J -Modul und es gilt für $c \in X_0, c = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma$

($r_{\sigma} \in R, \sigma$ singuläre 0-Simplexe), $g \in G$,

$$\partial_0 g c = \partial_0 \left(\sum_{\sigma} r_{\sigma} g \circ \sigma \right) = \sum_{\sigma} r_{\sigma} = g \left(\sum_{\sigma} r_{\sigma} \right) = g \partial_0 c. \text{ Somit gilt}$$

$$\partial_n g = g \partial_n, g \in G, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und daher auch}$$

$$g Z_n(X) \subset Z_n(X), g B_n(X) \subset B_n(X), g \in G, n \in \mathbb{N}_0. \text{ Nach (8.14a,b)}$$

sind die ∂_n J -Homomorphismen und $Z_n(X), B_n(X)$ sind J -Unter-

moduln von X_n . Insbesondere sind die J -Moduln

$$(X_n^0 \cap Z_n(X)) / Z_n(X)^0, (X_n^0 \cap B_n(X)) / B_n(X)^0 \text{ definiert, } n \in \mathbb{N}_0,$$

und können nach (8.14c) auch als R -Moduln betrachtet werden.

(8.17) Lemma.

Es sei X ein Raum, auf dem eine Gruppe G eigentlich diskontinuierlich operiert. Es sei $P : X \rightarrow X/G = X'$ die kanonische Projektion und es sei $P_{\#} : X_n \rightarrow X'_n$ der von P induzierte Homomorphismus der Ketten ($n \in \mathbb{N}_0$). Dann gilt:

a) Es gibt eine J -Basis T_n von X_n derart, daß $P_{\#} T_n$ R -Basis von X'_n ist. Insbesondere sind die X_n freie J -Moduln.

b) $P_{\#}$ ist surjektiv.

c) $\text{Ker } P_{\#} = X_n^0$.

Beweis.

a) Es seien $x, y \in X$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X durch $x \sim y : \Leftrightarrow$ es gibt $g \in G$ mit $y = gx$. Für $x \in X$ bezeichne $[x]$ die Äquivalenzklasse bzgl. $\sim$. $A \subset X$ sei ein vollständiges Repräsentantensystem bzgl. $\sim$, d.h. es ist

$\bigcup_{a \in A} [a] = X$ und für $a, b \in A$ gilt entweder $a = b$ oder $a \neq b$.

Es sei Δ_n das Standard- n -Simplex und E sei ein beliebiger, fest gewählter Punkt von Δ_n . Damit sei

$\tilde{T}_n := \{ \sigma \mid \sigma : \Delta_n \rightarrow X \text{ stetig} \}$ die Menge aller singulären

n -Simplexe von X und es sei $T_n := \{ \sigma \in \tilde{T}_n \mid \sigma(E) \in A \}$. Wir

zeigen zunächst:

a₁) Die Abbildung $G \times T_n \rightarrow \tilde{T}_n$, $(g, \sigma) \mapsto g\sigma (= g \circ \sigma)$ ist

bijektiv.

Surjektiv: Sei $\tau \in \tilde{T}_n$. Es gibt ein $a \in A$ mit $\tau(E) \in [a]$, also

gibt es ein $g \in G$ mit $\tau(E) = ga$. Es sei $\sigma := g^{-1}\tau$. Wegen

$\sigma(E) = a$ ist $\sigma \in T_n$ und es gilt $(g, \sigma) \mapsto g(g^{-1}\tau) = \tau$.

Injektiv: Seien $f, g \in G, \sigma, \delta \in T_n$ und gelte $f\sigma = g\delta$. Aus

$g^{-1}f\sigma(E) = \delta(E)$ folgt $\sigma(E) \sim \delta(E)$, und wegen $\sigma(E), \delta(E) \in A$

ist daher $\sigma(E) = \delta(E) =: a$. a ist also Fixpunkt von $g^{-1}f$.

Da G eigentlich diskontinuierlich operiert, ist insbesondere jedes vom neutralen Element $e = \text{id}_X$ von G verschiedene Element von G fixpunktfrei, und folglich ist $g^{-1}f = e$, also $f = g$. Wegen $f\sigma = g\delta = f\delta$ ist dann auch $\sigma = \delta$.

a_2) T_n ist J -Basis von X_n : Es sei $c \in X_n$. Da $\tilde{T}_n$ R -Basis von X_n ist, ist $c = \sum_{\tau \in \tilde{T}_n} r_\tau \tau$ mit $r_\tau \in R$ fast alle Null. Nach a_1) gibt es zu jedem $\tau \in \tilde{T}_n$ ein $g_\tau \in G$ und ein $\sigma_\tau \in T_n$ mit $\tau = g_\tau \sigma_\tau$.

Nach Definition der J -Multiplikation auf X_n ((8.15c)) gilt dann $c = \sum_{\tau} r_\tau (g_\tau \sigma_\tau) = \sum_{\tau} (r_\tau g_\tau) \sigma_\tau = \sum_{\tau} u_\tau \sigma_\tau$ mit $u_\tau := r_\tau g_\tau \in J$ für alle $\tau \in \tilde{T}_n$. Damit ist T_n J -Erzeugendensystem von X_n .

T_n ist zudem linear unabhängig über J : Es seien $u_\sigma \in J$, $\sigma \in T_n$, mit $u_\sigma = 0$ für fast alle $\sigma \in T_n$. Es gelte $\sum_{\sigma \in T_n} u_\sigma \sigma = 0$. Jedes u_σ läßt sich schreiben als $u_\sigma = \sum_{g \in G} r_{g,\sigma} g$ mit $r_{g,\sigma} \in R$ fast alle Null. Damit gilt

$0 = \sum_{\sigma \in T_n} u_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in T_n} \left(\sum_{g \in G} r_{g,\sigma} g \right) \sigma = \sum_{\sigma \in T_n} \sum_{g \in G} r_{g,\sigma} (g\sigma)$. Nach a_1) durchläuft $g\sigma$ genau einmal $\tilde{T}_n$, wenn $g \in G$ und $\sigma \in T_n$ durchläuft. Da $\tilde{T}_n$

R -Basis von X_n ist, folgt $r_{g,\sigma} = 0$ für alle $g \in G$, $\sigma \in T_n$, und somit gilt $u_\sigma = 0$ für alle $\sigma \in T_n$.

a_3) Es sei $T'_n := \{\tau' \mid \tau': \Delta_n \rightarrow X' \text{ stetig}\}$ die Menge aller singulären n -Simplexe von X' . T'_n ist R -Basis von X'_n , und wegen $P_\# \sigma = \tau \circ \sigma$ für $\sigma \in \tilde{T}_n$ ist $P_\# \tilde{T}_n \subset T'_n$. Zum Nachweis, daß $P_\# T_n$ R -Basis von X'_n ist, zeigen wir, daß $P_\#|_{T_n} : T_n \rightarrow T'_n$ bijektiv ist.

Surjektiv: Sei $\tau' \in T'_n$. Da P surjektiv ist, gibt es zu $\tau'(E) \in X'$ ein $x \in X$ mit $P(x) = \tau'(E)$. Zu x existiert ein $a \in A$ mit $x \in [a]$. Es gibt also ein $g \in G$ mit $gx = a$, und somit gilt $P(a) = P(gx) = P(x) = \tau'(E)$. Da $P : X \rightarrow X'$ Überlagerung und Δ_n einfach zusammenhängend und lokal bogen-

zusammenhängend ist, existiert zu τ' eine Liftung $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ mit $\sigma(E) = a$. Damit ist $\sigma \in T_n$ und es gilt $P_{\#}\sigma = P \circ \sigma = \tau'$.

Injektiv: Seien $\sigma, \delta \in T_n$ mit $P_{\#}\sigma = P_{\#}\delta$, d.h. es gilt $P \circ \sigma = P \circ \delta =: \tau' \in T'_n$. Aus $P(\sigma(E)) = P(\delta(E))$ folgt $\sigma(E) \sim \delta(E)$, und wegen $\sigma(E), \delta(E) \in A$ ist daher $\sigma(E) = \delta(E) =: a$. σ, δ sind also Liftungen von τ' durch denselben Punkt a , woraus wegen Δ_n zusammenhängend $\sigma = \delta$ folgt.

b) Da $P_{\#}T_n$ R-Basis von X'_n und $P_{\#}$ R-Homomorphismus ist, ist $P_{\#}$ trivialerweise surjektiv.

c) $\text{Ker } P_{\#} = X_n^0$: Da T_n J-Basis von X_n und $J_0 = \text{Ker } \varepsilon$ ein zweiseitiges Ideal von J ist, gilt nach (8.10b) zunächst

$X_n^0 = \left\{ \sum_{\sigma \in T_n} u_{\sigma} \sigma \mid u_{\sigma} \in J_0 \right\}$. Es sei nun $c \in X_n$, $c = \sum_{\sigma \in T_n} u_{\sigma} \sigma$ mit $u_{\sigma} \in J$, $u_{\sigma} = \sum_{g \in G} r_{g,\sigma} g$, $r_{g,\sigma} \in R$ für alle $\sigma \in T_n$, $g \in G$, also $c = \sum_{\sigma \in T_n} \left(\sum_{g \in G} r_{g,\sigma} g \right) \sigma = \sum_{\sigma \in T_n, g \in G} r_{g,\sigma} (g\sigma)$. Wegen $P \circ g = P$ für alle $g \in G$ ist $P_{\#}(g\sigma) = P \circ g \circ \sigma = P \circ \sigma = P_{\#}\sigma$ für alle $g \in G$, $\sigma \in T_n$, und somit ist

$P_{\#}c = \sum_{\sigma, g} r_{g,\sigma} P_{\#}(g\sigma) = \sum_{\sigma, g} r_{g,\sigma} P_{\#}\sigma = \sum_{\sigma} \left(\sum_g r_{g,\sigma} \right) P_{\#}\sigma$. Da $P_{\#}T_n$ R-Basis von X'_n ist, gilt $P_{\#}c = 0$ genau dann, wenn

$\sum_g r_{g,\sigma} = 0$ für alle $\sigma \in T_n$, also $u_{\sigma} \in \text{Ker } \varepsilon = J_0$ für alle $\sigma \in T_n$, also $c \in X_n^0$ ist.

(8.18) Bemerkung.

(8.17) entsprechende Aussagen findet man in [11], §2, Abschnitt 6 und 7. Dort wird allerdings vorausgesetzt, daß X ein simplizialer Komplex oder ein Zellenkomplex ist, und daß die Elemente von G Homöomorphismen sind, die simplizial sind bzw. Zellen auf Zellen abbilden.

(8.19) Lemma.

Es seien X, Y Räume, auf denen dieselbe Gruppe G eigentlich diskontinuierlich operiert. Es seien $P_1 : X \rightarrow X/G = X'$, $P_2 : Y \rightarrow Y/G = Y'$ die kanonischen Projektionen, $P_{1*} : X_n \rightarrow X'_n$, $P_{2*} : Y_n \rightarrow Y'_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$), $P_{1*} : H_n(X) \rightarrow H_n(X')$, $P_{2*} : H_n(Y) \rightarrow H_n(Y')$ ($n \geq 1$) die von P_1, P_2 induzierten R -Homomorphismen der Ketten bzw. Homologiemoduln. Es sei $Q : X \rightarrow Y$ äquivariant, und $\hat{Q} : X' \rightarrow Y'$ sei von Q induziert, d.h. es gilt $\hat{Q}(P_1(x)) = P_2(Q(x))$ für alle $x \in X$. Es sei $n \geq 1$. Dann besteht ein kommutatives Diagramm (D) von R -Moduln und R -Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(X') & \xrightarrow{\hat{Q}_*} & H_n(Y') \\
 E_1 \downarrow & & \downarrow E_2 \\
 H_n(X')/P_{1*}H_n(X) & \xrightarrow{\hat{Q}_{**}} & H_n(Y')/P_{2*}H_n(Y) \\
 \bar{A}_1 \uparrow & & \uparrow \bar{A}_2 \\
 Z_n(X')/P_{1*}Z_n(X) & \xrightarrow{\hat{Q}_{**}} & Z_n(Y')/P_{2*}Z_n(Y) \\
 \bar{B}_1 \uparrow & & \uparrow \bar{B}_2 \\
 X_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(X)/B_{n-1}(X)^0 & \xrightarrow{Q_{**}} & Y_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(Y)/B_{n-1}(Y)^0
 \end{array}$$

Dabei ist $\hat{Q}_{**}$ von $\hat{Q}_*$ induziert, und $\hat{Q}_{**}, Q_{**}$ werden von $\hat{Q}_* : X'_n \rightarrow Y'_n$ bzw. von $Q_* : X_{n-1} \rightarrow Y_{n-1}$ induziert. E_1, E_2 sind kanonische Projektionen, $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{B}_1, \bar{B}_2$ sind Isomorphismen. (Man beachte, daß wegen $P_{1*}Z_n(X) \subset Z_n(X')$, $P_{2*}Z_n(Y) \subset Z_n(Y')$ die Moduln $Z_n(X')/P_{1*}Z_n(X)$, $Z_n(Y')/P_{2*}Z_n(Y)$ definiert sind. Die Moduln $X_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(X)/B_{n-1}(X)^0$ und $Y_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(Y)/B_{n-1}(Y)^0$ sind definiert wegen (8.16c).)

Beweis.

Wir müssen im folgenden Randoperatoren auf den Kettenmoduln X_n, X'_n, Y_n, Y'_n betrachten. Die jeweiligen Randoperatoren werden in der Schreibweise nicht unterschieden, wir bezeichnen sie in allen Fällen mit ∂_n . Ferner werden etwa

$P_{1*} : X_n \rightarrow X'_n$ und $P_{1*} : X_{n-1} \rightarrow X'_{n-1}$ in der Schreibweise nicht unterschieden. Aus dem Zusammenhang wird jedoch klar sein, welche Abbildung gemeint ist. Noch eine Vorbemerkung:

Nach Definition von $\hat{Q}$ ist $\hat{Q} \circ P_1 = P_2 \circ Q$, und daher gilt auch $\hat{Q}_* P_{1*} = P_{2*} Q_*$ sowie $\hat{Q}_* P_{1*} = P_{2*} Q_*$ ($Q_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$).

1) Wir definieren $\hat{Q}_{**}$, E_1 , E_2 und zeigen die Kommutativität des oberen Teildagramms von (D). Es sei

$\hat{Q}_{**} : H_n(X')/P_{1*}H_n(X) \rightarrow H_n(Y')/P_{2*}H_n(Y)$ definiert durch

$h + P_{1*}H_n(X) \mapsto \hat{Q}_*h + P_{2*}H_n(Y)$, $h \in H_n(X')$. Wegen

$\hat{Q}_*P_{1*}H_n(X) = P_{2*}Q_*H_n(X) \subset P_{2*}H_n(Y)$ ist $\hat{Q}_{**}$ wohldefiniert.

Es seien E_1, E_2 die kanonischen Epimorphismen

$H_n(X') \rightarrow H_n(X')/P_{1*}H_n(X)$ bzw. $H_n(Y') \rightarrow H_n(Y')/P_{2*}H_n(Y)$.

Es ist klar, daß $\hat{Q}_{**}$, E_1, E_2 R-Homomorphismen sind. Es

sei nun $h \in H_n(X')$. Dann gilt :

$$\hat{Q}_{**}E_1h = \hat{Q}_{**}(h + P_{1*}H_n(X)) = \hat{Q}_*h + P_{2*}H_n(Y) = E_2\hat{Q}_*h.$$

2) Definition von $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \hat{Q}_{**}$ und Kommutativität des mittleren Teildagramms von (D): Es seien zunächst

$$A_1 : Z_n(X') \rightarrow H_n(X') = Z_n(X')/B_n(X'),$$

$$A_2 : Z_n(Y') \rightarrow H_n(Y') = Z_n(Y')/B_n(Y')$$

die kanonischen (R-)Epimorphismen ($n \geq 1$). Es sei $z' \in Z_n(X')$. Da $\hat{Q}_*$ von $\hat{Q}_{**}$

induziert wird, gilt

$$\hat{Q}_*A_1z' = \hat{Q}_*(z + B_n(X')) = \hat{Q}_{**}z' + B_n(Y') = A_2\hat{Q}_{**}z', \text{ d.h. wir}$$

haben ein kommutatives Diagramm (D')

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(X') & \xrightarrow{\hat{A}_1^*} & H_n(Y') \\
 \uparrow A_1 & & \uparrow A_2 \\
 Z_n(X') & \xrightarrow{\hat{A}_2^*} & Z_n(Y')
 \end{array}$$

Wegen (8.17b) ist $P_{1*}X_{n+1} = X'_{n+1}$. Daraus folgt

$B_n(X') = \partial_{n+1}X'_{n+1} = \partial_{n+1}P_{1*}X_{n+1} = P_{1*}\partial_{n+1}X_{n+1} = P_{1*}B_n(X) \subset P_{1*}Z_n(Y)$. Es sei $z \in Z_n(X)$. Wegen $B_n(X') \subset P_{1*}Z_n(X) \subset Z_n(X')$ stimmt die Restklasse mod $B_n(X')$ von $P_{1*}z$ in $Z_n(X')$ überein mit der Restklasse mod $B_n(X')$ von $P_{1*}z$ in $P_{1*}Z_n(X)$. Damit gilt nach Definition von A_1 und P_{1*} ($P_{1*}(z+B_n(X)) = \text{Restklasse mod } B_n(X') \text{ von } P_{1*}z \text{ in } Z_n(X')$)

$A_1P_{1*}Z_n(X) = P_{1*}Z_n(X)/B_n(X') = P_{1*}H_n(X)$. Analog ist

$A_2P_{2*}Z_n(Y) = P_{2*}Z_n(Y)/B_n(Y') = P_{2*}H_n(Y)$. Zudem haben wir $\hat{Q}_*P_{1*}Z_n(X) = P_{2*}\hat{Q}_*Z_n(X) \subset P_{2*}Z_n(Y)$ und $\hat{Q}_*P_{1*}H_n(X) \subset P_{2*}H_n(Y)$ (vgl. 1)). Daher induziert (D') ein kommutatives Diagramm von R-Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(X')/P_{1*}H_n(X) & \xrightarrow{\hat{Q}_{**}} & H_n(Y')/P_{2*}H_n(Y) \\
 \uparrow \bar{A}_1 & & \uparrow \bar{A}_2 \\
 Z_n(X')/P_{1*}Z_n(X) & \xrightarrow{\hat{Q}_{**}} & Z_n(Y')/P_{2*}Z_n(Y)
 \end{array}$$

Dabei ist $\hat{Q}_{**}$ gerade die in 1) definierte Abbildung, $\hat{Q}_{**}$ ist gegeben durch $z' + P_{1*}Z_n(X) \mapsto \hat{Q}_*z' + P_{2*}Z_n(Y)$, $z' \in Z_n(X')$, und $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ sind definiert durch $z' + P_{1*}Z_n(X) \mapsto A_1z' + P_{1*}H_n(X)$ bzw. $y' + P_{2*}Z_n(Y) \mapsto A_2y' + P_{2*}H_n(Y)$, $z' \in Z_n(X')$, $y' \in Z_n(Y')$. Aus der Definition von $\bar{A}_1$ ergibt sich, daß $\bar{A}_1$ gerade der in der "Kürzungsregel"

$Z_n(X')/P_{1\#}Z_n(X) \approx (Z_n(X')/B_n(X'))/(P_{1\#}Z_n(X)/B_n(X')) =$
 $= H_n(X')/P_{1\#}H_n(X)$ auftretende kanonische Isomorphismus ist.

Analog erhält man, daß auch $\bar{A}_2$ ein Isomorphismus ist.

3) Definition von $Q_{\#}$, $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$ und Kommutativität des unteren Teildiagramms von (D): Nach (8.16b) ist $Q_{\#} : X_{n-1} \rightarrow Y_{n-1}$

ein J-Homomorphismus. Folglich ist $Q_{\#}X_{n-1}^0 \subset Y_{n-1}^0$ und wegen

$Q_{\#}B_{n-1}(X) \subset B_{n-1}(Y)$ auch $Q_{\#}B_{n-1}(X)^0 \subset B_{n-1}(Y)^0$. Trivialerweise ist dann

$Q_{\#}(X_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(X)) \subset Q_{\#}X_{n-1}^0 \cap Q_{\#}B_{n-1}(X) \subset$

$Y_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(Y)$. Durch $w+B_{n-1}(X)^0 \mapsto Q_{\#}w+B_{n-1}(Y)^0$,

$w \in X_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(X)$, wird somit eine Abbildung

$Q_{\#} : X_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(X)/B_{n-1}(X)^0 \rightarrow Y_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(Y)/B_{n-1}(Y)^0$ definiert. Es ist klar, daß $Q_{\#}$ J-linear und R-linear ist.

(Man beachte, daß alle auftretenden Moduln zugleich J-Moduln und R-Moduln sind, vgl. (8.14c), (8.16c).)

Die nun folgende Definition von $\bar{B}_1$ und der Nachweis, daß $\bar{B}_1$ Isomorphismus ist, werden aus [11], Abschnitt 7.3, übernommen. Es sei $w \in X_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(X)$. Zu w gibt es ein $c_w \in X_n$

mit $\partial_n c_w = w$, und wegen $X_{n-1}^0 = \text{Ker } P_{1\#}$ ((8.17c)) ist

$\partial_n P_{1\#}c_w = P_{1\#}\partial_n c_w = P_{1\#}w = 0$, also $P_{1\#}c_w \in \text{Ker } \partial_n = Z_n(X')$.

Wir definieren zunächst $B_1 : X_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(X) \rightarrow Z_n(X')/P_{1\#}Z_n(X)$

durch $w \mapsto P_{1\#}c_w + P_{1\#}Z_n(X)$. Wir zeigen, daß diese Definition

unabhängig von der Wahl von c_w ist: Es seien $c_1, c_2 \in X_n$ mit

$\partial_n c_1 = w = \partial_n c_2$. Dann ist $z := c_1 - c_2 \in \text{Ker } \partial_n = Z_n(X)$, und

daher ist $P_{1\#}c_1 - P_{1\#}c_2 = P_{1\#}z \in P_{1\#}Z_n(X)$. Somit ist B_1 wohldefiniert, und B_1 ist R-Homomorphismus, da $\partial_n, P_{1\#}$ R-Homomorphismen sind.

B_1 ist surjektiv: Sei $z' \in Z_n(X')$. Da $P_{1\#} : X_n \rightarrow X'_n$ surjektiv ist ((8.17b)), gibt es ein $c \in X_n$ mit $P_{1\#}c = z'$. Wir setzen

$w := \partial_n c \in B_{n-1}(X)$. Wegen $P_{1*}w = P_{1*}\partial_n c = \partial_n P_{1*}c = \partial_n z' = 0$ ist $w \in \text{Ker } P_{1*} = X_{n-1}^0$, also $w \in X_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(X)$, und es gilt $B_1 w = P_{1*}c + P_{1*}Z_n(X) = z' + P_{1*}Z_n(X)$.

Wir zeigen noch $\text{Ker } \bar{B}_1 = B_{n-1}(X)^0$. Dann ist die Abbildung $\bar{B}_1 : X_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(X)/B_{n-1}(X)^0 \rightarrow Z_n(X')/P_{1*}Z_n(X)$,

$w + B_{n-1}(X)^0 \mapsto B_1 w$, wohldefiniert und ein R-Isomorphismus.

Sei zunächst $w \in B_{n-1}(X)^0$. Dann ist $w = \sum_{i=1}^m u_i \partial_n c_i$ mit $m \in \mathbb{N}$, $u_i \in J_0$, $c_i \in X_n$, $i = 1, \dots, m$. Es sei $c := \sum_{i=1}^m u_i c_i$. Dann ist $c \in X_n^0 = \text{Ker } P_{1*}$, und da ∂_n J-Homomorphismus ist ((8.16c)), gilt $\partial_n c = w$. Nach Definition von B_1 ist

$B_1 w = P_{1*}c + P_{1*}Z_n(X) = 0$, also ist $w \in \text{Ker } B_1$. Sei umgekehrt $w \in X_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(X)$ und gelte $B_1 w = 0$. Wir wählen $c \in X_n$ mit $\partial_n c = w$. Wegen $0 = B_1 w = P_{1*}c + P_{1*}Z_n(X)$ existiert ein

$z \in Z_n(X)$ mit $P_{1*}c = P_{1*}z$. Folglich ist $c - z \in \text{Ker } P_{1*} = X_n^0$, und somit hat $c - z$ die Form $c - z = \sum_{x \in X_n} u_x x$ mit $u_x \in J_0$ fast alle Null. Wegen $\partial_n z = 0$ und ∂_n J-linear folgt nun

$w = \partial_n c = \partial_n (c - z) = \sum_{x \in X_n} u_x \partial_n x \in B_{n-1}(X)^0$. Es seien

$B_2 : Y_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(Y) \rightarrow Z_n(Y')/P_{2*}Z_n(Y)$ und

$\bar{B}_2 : Y_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(Y)/B_{n-1}(Y)^0 \rightarrow Z_n(Y')/P_{2*}Z_n(Y)$ analog zu

$B_1, \bar{B}_1$ definiert. B_2 ist also ein R-Homomorphismus, $\bar{B}_2$ ein R-Isomorphismus.

Es sei nun $w \in X_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(X)$ und es sei $c \in X_n$ mit $\partial_n c = w$.

Dann ist $\partial_n Q_* c = Q_* \partial_n c = Q_* w \in Y_{n-1}^0 \cap B_{n-1}(Y)$, und es gilt

$\bar{B}_2 Q_{**}(w + B_{n-1}(X)^0) = \bar{B}_2(Q_* w + B_{n-1}(Y)^0) = B_2(Q_* w) =$
 $= P_{2*}Q_* c + P_{2*}Z_n(Y) = \hat{Q}_{**}P_{1*}c + P_{2*}Z_n(Y) = \hat{Q}_{**}(P_{1*}c + P_{1*}Z_n(X)) =$
 $= \hat{Q}_{**}(B_1 w) = \hat{Q}_{**}\bar{B}_1(w + B_{n-1}(X)^0)$. Damit ist $\bar{B}_2 Q_{**} = \hat{Q}_{**}\bar{B}_1$ nachgewiesen.

Nach diesen umfangreichen Vorbereitungen kommen wir nun zum Beweis von (8.4) und (8.5).

Beweis von (8.4).

Wir wollen Lemma (8.11) und (8.19) anwenden. In (8.19) setzen wir $X := M$, $Y := S$. G sei die von der freien $\mathbb{Z}_p$ -Aktion f bzw. die von φ erzeugte Gruppe, also $G = \mathbb{Z}_p$. $\mathbb{Z}_p$ operiert dann eigentlich diskontinuierlich auf M und S (vgl. 8.16a). Es sei R der Restklassenring $\mathbb{Z}_p$. R wird mit der trivialen Gruppenoperation ((8.13b)) versehen, wodurch R zum J -Modul wird. (J sei gemäß (8.12) definiert.) Aus $Q \circ f = \varphi \circ Q$ folgt trivialerweise $Q \circ f^i = \varphi^i \circ Q$ für alle $i = 0, \dots, p-1$, d.h. $Q : M \rightarrow S$ ist äquivariant im Sinne von (8.16b). Nach (8.16b) ist $Q_* : M_n \rightarrow S_n$ ein J -Homomorphismus ($n \in \mathbb{N}_0$) und nach (8.16c) sind auch $\partial_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$, $\partial_n : S_n \rightarrow S_{n-1}$ ($n \geq 1$) und $\partial_0 : M_0 \rightarrow R$, $\partial_0 : S_0 \rightarrow R$ J -Homomorphismen. Da M und S bogenzusammenhängend sind, gilt $\tilde{H}_0(M) = 0$ und $\tilde{H}_0(S) = 0$, d.h. es ist $Z_0(M) = B_0(M)$ und $Z_0(S) = B_0(S)$. Wegen $H_n(M) = 0$ für $1 \leq n < N$ ist $Z_n(M) = B_n(M)$ für $1 \leq n < N$. S ist zusammenziehbar, insbesondere gilt also $H_n(S) = 0$, d.h. $Z_n(S) = B_n(S)$ für alle $n \geq 1$. Damit haben wir ein kommutatives Diagramm von J -Moduln und J -Homomorphismen mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longleftarrow & R & \xleftarrow{\partial_0} & M_0 & \xleftarrow{\partial_1} & M_1 & \xleftarrow{\partial_2} & \dots & \xleftarrow{\partial_{N-1}} & M_{N-1} & \xleftarrow{\partial_N} & M_N \\
 & & \downarrow \text{id}_R & & \downarrow Q_* & & \downarrow Q_* & & & & \downarrow Q_* & & \downarrow Q_* \\
 0 & \longleftarrow & R & \xleftarrow{\partial_0} & S_0 & \xleftarrow{\partial_1} & S_1 & \xleftarrow{\partial_2} & \dots & \xleftarrow{\partial_{N-1}} & S_{N-1} & \xleftarrow{\partial_N} & S_N
 \end{array}$$

(Man beachte, daß ∂_0 surjektiv ist, und daß $\partial_0 Q_* = \partial_0$ gilt.)

Nach (8.17a) sind M_n, J_n ($n \in \mathbb{N}_0$) freie J -Moduln. Nach (8.11b) induziert daher $\varphi_n : M_{n-1} \rightarrow S_{n-1}$ einen Isomorphismus $\bar{Q}_n : M_{n-1}^0 \cap Z_{n-1}(M)/Z_{n-1}(M)^0 \rightarrow S_{n-1}^0 \cap Z_{n-1}(S)/Z_{n-1}(S)^0$, wobei $\bar{Q}_n$ durch $w + Z_{n-1}(M)^0 \mapsto \varphi_n w + Z_{n-1}(S)^0, w \in M_{n-1}^0 \cap Z_{n-1}(M)$, gegeben ist, $n = 1, \dots, N+1$. ($\bar{Q}_n$ ist R -linear und J -linear, vgl. (8.14c), (8.16c).) Wegen $Z_{n-1}(M) = B_{n-1}(M)$, $Z_{n-1}(S) = B_{n-1}(S)$ für $n = 1, \dots, N$ stimmt für diese n $\bar{Q}_n$ überein mit dem in (8.19) definierten Homomorphismus Q_{**} , d.h. Q_{**} im Diagramm (D) von (8.19) ist ein Isomorphismus für $n = 1, \dots, N$. Da $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{B}_1, \bar{B}_2$ in (D) ebenfalls Isomorphismen sind, folgt, daß auch $\hat{Q}_{**}$ in (D) für $n = 1, \dots, N$ ein Isomorphismus ist. Wegen $H_n(S) = 0$ für alle $n \geq 1$ ist E_2 in (D) ein Isomorphismus für alle $n \geq 1$. Analog ist E_1 ein Isomorphismus für $1 \leq n \leq N-1$ und für $n = N$ ist E_1 nach Definition ein Epimorphismus. Es folgt, daß $\hat{Q}_* : H_n(M'; R) \rightarrow H_n(S'; R)$ für $n = 1, \dots, N-1$ ein Isomorphismus, für $n = N$ ein Epimorphismus ist.

(8.20) Bemerkung.

Im obigen Beweis von (8.4) spielte die spezielle Wahl von $R = \text{Restklassenring } \mathbb{Z}_p$ keine Rolle. Von der Gruppe $\mathbb{Z}_p$ wurde nur verwendet, daß sie eigentlich diskontinuierlich auf M und S operiert. Ferner benötigten wir neben dem Bogenzusammenhang von M und S noch $H_q(M) = 0$ für $0 < q < N$ (im Fall $N \geq 2$) und $H_q(S) = 0$ für $0 < q \leq N$. Damit haben wir folgendes allgemeineres Resultat bewiesen:

Es seien $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ bogenzusammenhängende Räume, auf denen dieselbe Gruppe G eigentlich diskontinuierlich

operiert. Es sei $Q : X \rightarrow Y$ äquivalent. Es sei $X' := X/G$, $Y' := Y/G$. $\hat{Q} : X' \rightarrow Y'$ sei die von Q induzierte stetige Abbildung. R sei ein nicht notwendig kommutativer Ring mit Einselement. Es sei $N \in \mathbb{N}$ und es gelte $H_q(Y; R) = 0$ für $0 < q \leq N$, im Fall $N > 2$ gelte zudem $H_q(X; R) = 0$ für $0 < q < N$. Dann ist $\hat{Q}_* : H_q(X'; R) \rightarrow H_q(Y'; R)$ für $0 \leq q \leq N-1$ ein Isomorphismus, für $q = N$ ein Epimorphismus. (Man beachte, daß für bogenzusammenhängende Räume $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ und für jedes stetige $a : U \rightarrow V$ $a_* : H_0(U; R) \rightarrow H_0(V; R)$ ein Isomorphismus ist, vgl. etwa [20], Satz 2, S. 251.)

Beweis von (8.5).

Es sei G die von $\varphi : S \rightarrow S$ erzeugte (multiplikativ geschriebene) Gruppe $\mathbb{Z}_p$, R sei vorläufig ein beliebiger Ring mit Einselement, auf dem G trivial operieren soll. Wir zeigen: $H_0(S'; R) \approx R$, $H_n(S'; R) \approx R/pR$ für $n = 1, 3, 5, \dots$, $H_n(S'; R) \approx_p R$ für $n = 2, 4, 6, \dots$, wobei $pR := \{pr \mid r \in R\}$, $_p R := \{r \in R \mid pr = 0\}$. $H_0(S'; R) \approx R$ ist klar, denn S' ist bogenzusammenhängend. Wir wollen im folgenden J sowohl als Ring als auch als R -Modul auffassen (vgl. Definition (3.12)). Auf dem R -Modul J definieren wir eine Gruppenoperation durch $g(\sum_{j \in G} r_j g', g') := \sum_{j \in G} r_j (gg')$, $g \in G$, $\sum_{j \in G} r_j g' \in J$. Die durch diese Gruppenoperation induzierte J -Multiplikation auf dem R -Modul J im Sinne von (3.13c) stimmt dann mit der Ringmultiplikation von J überein. Das bedeutet, daß nach (3.14c) Ideale von J als R -Untermoduln betrachtet werden können. Ebenso können Quotienten von Idealen von J als R -Moduln und die im folgenden auftretenden J -Homomorphismen als R -Homomorphismen aufgefaßt werden.

Wir betrachten nun im Diagramm (D) von (2.19) die rechte Spalte mit $\ell := 3$. Wegen $\tilde{H}_0(S) = 0$, $H_q(S) = 0$ für alle $q \in \mathbb{N}$ und da E_2 , A_2 , B_2 Isomorphismen sind, gilt

$$H_q(S') \approx S_{q-1}^0 \cap B_{q-1}(S)/B_{q-1}(S)^0 = S_{q-1}^0 \cap Z_{q-1}(S)/Z_{q-1}(S)^0$$

für alle $q \in \mathbb{N}$. Nach (3.11c) hängt die Struktur von

$S_n^0 \cap Z_n(S)/Z_n(S)^0$ nicht ab von der speziellen exakten

Sequenz $0 \leftarrow R \xleftarrow{\partial_2} S_0 \xleftarrow{\partial_1} S_1 \xleftarrow{\partial_0} \dots$ von freien J -Moduln S_n

und J -Homomorphismen ∂_n , $n \in \mathbb{N}_0$. Wir wollen eine weitere

derartige Sequenz betrachten. Sei hierzu t ein erzeugendes

Element von $G = \mathbb{Z}_p$, also $G = \{t^0=1, t, \dots, t^{p-1}\}$. Damit ist

$J = \{\sum_{i=0}^{p-1} r_i t^i \mid r_i \in R \text{ für } i = 0, \dots, p-1\}$. Es seien $c := \sum_{i=0}^{p-1} t^i$,

$d := t-1 \in J$ und es seien $C, D: J \rightarrow J$ definiert durch

$Cu := c \cdot u$, $Du := d \cdot u$, $u \in J$. Für $v = \sum_{i=0}^{p-1} r_i t^i \in J$ gilt

$$c \cdot v = (1+t+\dots+t^{p-1})(r_0+r_1 t+\dots+r_{p-1} t^{p-1}) = \sum_{i=0}^{p-1} (\sum_{j=0}^{p-1} r_j) t^i = \\ = (r_0+r_1 t+\dots+r_{p-1} t^{p-1})(1+t+\dots+t^{p-1}) = v \cdot c \text{ und}$$

$$d \cdot v = (t-1)(r_0+r_1 t+\dots+r_{p-1} t^{p-1}) =$$

$$(r_{p-1}-r_0)+(r_0-r_1)t+\dots+(r_{p-2}-r_{p-1})t^{p-1} =$$

$$(r_0+r_1 t+\dots+r_{p-1} t^{p-1})(t-1) = v \cdot d, \text{ und folglich sind } C, D$$

J -Homomorphismen. Trivialerweise ist $\varepsilon: J \rightarrow R$ ein R -Homo-

morphismus. Es sei $g \in G$ und $u = \sum_{g' \in G} r_{g'} g'$, $g' \in J$. Wegen

$$\varepsilon(gu) = \varepsilon(\sum_{g' \in G} r_{g'} (gg')) = \sum_{g' \in G} r_{g'} g' = g(\sum_{g' \in G} r_{g'}) = g(\varepsilon u) \text{ ist } \varepsilon \text{ nach}$$

(3.14a) auch J -Homomorphismus. Ferner ist J trivialerweise

ein freier J -Modul mit Basis $\{1_J\}$. Wir zeigen, daß die

Sequenz $(*) \quad 0 \leftarrow R \xleftarrow{\varepsilon} J \xleftarrow{D} J \xleftarrow{C} J \xleftarrow{D} J \xleftarrow{C} \dots$ exakt ist.

Nach (3.11) gilt dann $S_0^0 \cap Z_0(S)/Z_0(S)^0 \approx J^0 \cap \text{Ker } \varepsilon / (\text{Ker } \varepsilon)^0$,

$$S_n^0 \cap Z_n(S)/Z_n(S)^0 \approx J^0 \cap \text{Ker } D / (\text{Ker } D)^0 \text{ für } n = 1, 3, 5, \dots,$$

$$S_n^0 \cap Z_n(S)/Z_n(S)^0 \approx J^0 \cap \text{Ker } C / (\text{Ker } C)^0 \text{ für } n = 2, 4, 6, \dots$$

Zur Exaktheit von $(*)$: Es ist klar, daß ε surjektiv ist.

Sei nun $u = \sum_{i=0}^{p-1} r_i t^i \in J$.

Wegen $Du = d \cdot u = (r_{p-1} - r_0) + (r_0 - r_1)t + \dots + (r_{p-2} - r_{p-1})t^{p-1}$ ist
 $\text{Ker } D = \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} r_i t^i \in J \mid r_0 = r_1 = \dots = r_{p-1} \right\} = \{rc \mid r \in R\}$ und $\text{Im } D \subset J_0$.

Sei $v = \sum_{i=0}^{p-1} r_i' t^i \in J_0$. Wir setzen $r_i := -\sum_{j=0}^{i-1} r_j'$ für $i=0, \dots, p-1$ und $u := \sum_{i=0}^{p-1} r_i t^i \in J$. Wegen $r_{p-1} - r_0 = -0 + r_0' = r_0'$, $r_{i-1} - r_i = r_i'$ für $i = 1, \dots, p-1$ ist $Du = v$, und somit gilt $\text{Im } D = J_0 = \text{Ker } \varepsilon$.

Aus $Cu = c \cdot u = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sum_{j=0}^{p-1} r_j \right) t^i$ für $u = \sum_{i=0}^{p-1} r_i t^i \in J$ folgt

$\text{Ker } C = J_0 = \text{Im } D$ und $\text{Im } C \subset \{rc \mid r \in R\}$. Sei $v = rc$, $r \in R$, und sei $r_0 := r$, $r_i := 0$ für $i = 1, \dots, p-1$, $u := \sum_{i=0}^{p-1} r_i t^i$.

Dann ist $Cu = \sum_{i=0}^{p-1} r t^i = rc = v$ und daher gilt

$\text{Im } C = \{rc \mid r \in R\} = \text{Ker } D$. Damit ist nachgewiesen, daß (*) exakt ist.

Als nächstes berechnen wir $J^0 \cap \text{Ker } D / (\text{Ker } D)^0$ und

$J^0 \cap \text{Ker } \varepsilon / (\text{Ker } \varepsilon)^0 = J^0 \cap \text{Ker } C / (\text{Ker } C)^0$. Da $\{1_J\}$ J -Basis von J ist und da J_0 zweiseitiges Ideal von J ist, erhalten wir nach (8.10b) $J^0 = \{u \cdot 1_J \mid u \in J_0\} = J_0$. Ferner ist
 $(\text{Ker } \varepsilon)^0 = (\text{Ker } C)^0 = (J_0)^0 =$

$= \left\{ \sum_{k=1}^m u_k z_k \mid m \in \mathbb{N}, u_k, z_k \in J_0 \text{ für } k = 1, \dots, m \right\} =: J_0^2$ und

$(\text{Ker } D)^0 = \left\{ \sum_{k=1}^m u_k (r_k c) \mid m \in \mathbb{N}, u_k \in J_0, r_k \in R \text{ für } k = 1, \dots, m \right\}$.

Für $u = \sum_{i=0}^{p-1} r_i t^i \in J_0$ und $r \in R$ ist

$u(rc) = (r_0 + r_1 t + \dots + r_{p-1} t^{p-1})(r + r t + \dots + r t^{p-1}) = \sum_{i=0}^{2p-1} \left(\sum_{j=0}^{p-1} r_j \right) r t^i = 0$,

und daher ist $(\text{Ker } D)^0 = 0$. Weiter gilt

$J^0 \cap \text{Ker } D = J_0 \cap \{rc \mid r \in R\} = \{rc \mid r \in R, pr=0\} \approx \{r \in R \mid pr=0\} = {}_p R$

(mit R -Isomorphismus $rc \mapsto r$) und

$J^0 \cap \text{Ker } \varepsilon = J^0 \cap \text{Ker } C = J_0 \cap J_0 = J_0$. Somit ist

$J^0 \cap \text{Ker } D / (\text{Ker } D)^0 \approx J^0 \cap \text{Ker } D \approx {}_p R$.

Für $u \in J_0$ bezeichne im folgenden $[u]$ die Restklasse mod J_0^2 von u in J_0 . Zur Bestimmung von

$J^0 \cap \text{Ker } \varepsilon / (\text{Ker } \varepsilon)^0 = J^0 \cap \text{Ker } \phi / (\text{Ker } \phi)^0 = J_0 / J_0^2$ betrachten wir $f: R \rightarrow J_0 / J_0^2$, $fr := [rd] = rd + J_0^2$, $r \in R$. Es ist klar, daß f R -Homomorphismus ist. Zur Berechnung von $\text{Ker } f$ und Im f ist eine andere Beschreibung von J_0^2 nützlich, nämlich $J_0^2 = \left\{ \sum_{i,j=0}^{p-1} r_{ij} (t^i - 1)(t^j - 1) \mid r_{ij} \in R \text{ für } i, j = 0, \dots, p-1 \right\}$. Sei zunächst $x \in J_0^2$, $x = \sum_{k=1}^m u_k z_k$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $u_k, z_k \in J_0$ für $k = 1, \dots, m$. Offensichtlich ist

$J_0 = \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} r_i (t^i - 1) \mid r_i \in R, i = 0, \dots, p-1 \right\}$, und daher lassen sich u_k, z_k schreiben als $u_k = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ki} (t^i - 1)$, $z_k = \sum_{j=0}^{p-1} b_{kj} (t^j - 1)$ mit $a_{ki}, b_{kj} \in R$ für $k = 1, \dots, m, i, j = 0, \dots, p-1$. Damit ist $u_k z_k = \sum_{i,j=0}^{p-1} a_{ki} b_{kj} (t^i - 1)(t^j - 1)$, $k = 1, \dots, m$, und folglich ist $x = \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=0}^{p-1} a_{ki} b_{kj} (t^i - 1)(t^j - 1) = \sum_{i,j=0}^{p-1} \left(\sum_{k=1}^m a_{ki} b_{kj} \right) (t^i - 1)(t^j - 1) = \sum_{i,j=0}^{p-1} r_{ij} (t^i - 1)(t^j - 1)$ mit $r_{ij} := \sum_{k=1}^m a_{ki} b_{kj}$ für $i, j = 0, \dots, p-1$. Umgekehrt liegt wegen $r(t^l - 1) \in J_0$ für $r \in R, l = 0, \dots, p-1$ jede Summe $\sum_{i,j=0}^{p-1} r_{ij} (t^i - 1)(t^j - 1)$ mit $r_{ij} \in R$ für $i, j = 0, \dots, p-1$ in J_0^2 .

Wir zeigen nun, daß f surjektiv ist: Sei $[u] \in J_0 / J_0^2$ mit $u = \sum_{k=0}^{p-1} r_k (t^k - 1) \in J_0$ ($r_k \in R$ für alle k) und sei $r := \sum_{k=0}^{p-1} k r_k \in R$. Zum Nachweis von $fr = [u]$ beachte man, daß wegen $(t^i - 1)(t^j - 1) = (t^i t^j - 1) - (t^i - 1) - (t^j - 1)$ $t^i t^j - 1 \equiv (t^i - 1) + (t^j - 1) \pmod{J_0^2}$ gilt, $i, j = 0, \dots, p-1$, woraus $t^{k-1} \equiv k(t-1) \pmod{J_0^2}$ und somit auch $r_k (t^k - 1) \equiv k r_k d \pmod{J_0^2}$ für alle $k = 0, \dots, p-1$ folgt. Damit gilt $fr = [rd] = \left[\sum_{k=0}^{p-1} k r_k d \right] = \sum_{k=0}^{p-1} [k r_k d] = \sum_{k=0}^{p-1} [r_k (t^k - 1)] = \left[\sum_{k=0}^{p-1} r_k (t^k - 1) \right] = [u]$.

Als nächstes zeigen wir $\text{Ker } f = pR$. Für $r \in R$ gilt $f(pr) = [prd] = [r(t^p - 1)] = [0] = 0$, also ist $pR \subset \text{Ker } f$. Es sei $a \in R$ und es gelte $fa = 0$. Dann ist $ada \in J_0^2$, d.h. es

es gibt $a_{ij} \in R$, $i, j = 0, \dots, p-1$ mit

$$\begin{aligned} ad &= \sum_{i,j=0}^{p-1} a_{ij} (t^i - 1)(t^j - 1) = \sum_{i,j=1}^{p-1} a_{ij} (t^{i+j} - t^i - t^j + 1) = \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^{p-1} a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p}}^{p-1} a_{ij} \right) + \left(-\sum_{i=1}^{p-1} a_{i1} - \sum_{j=1}^{p-1} a_{1j} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p}}^{p-1} a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1}}^{p-1} a_{ij} \right) t + \\ &+ \dots + \left(-\sum_{i=1}^{p-1} a_{i,p-1} - \sum_{j=1}^{p-1} a_{p-1,j} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p-1}}^{p-1} a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+p-1}}^{p-1} a_{ij} \right) t^{p-1}. \end{aligned}$$

(Man beachte $\sum_{\emptyset} := 0$.) Wir setzen $A_{p,0} := \sum_{i,j=1}^{p-1} a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p}}^{p-1} a_{ij}$ und

$$A_{p,k} := -\sum_{i=1}^{p-1} a_{ik} - \sum_{j=1}^{p-1} a_{kj} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=k}}^{p-1} a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+k}}^{p-1} a_{ij} \quad \text{für } k = 1, \dots, p-1.$$

Damit gilt $at-a = ad = \sum_{k=0}^{p-1} A_{p,k} t^k$, woraus $A_{p,1} = a$ und im

Fall $p > 2$ $A_{p,k} = 0$ für $k = 2, \dots, p-1$ folgt. Zusammen mit

Hilfssatz (8.21), den wir gleich anschließend formulieren

und beweisen werden, erhalten wir

$a = \sum_{k=1}^{p-1} k A_{p,k} = -p \sum_{\substack{i,j=1 \\ p \nmid i+j \nmid 2(p-1)}}^{p-1} a_{ij} \in pR$. Also ist $\text{Ker } f \subset pR$. Es folgt $R/pR = R/\text{Ker } f \approx \text{Im } f = J_0/J_0^2$. Damit haben wir gezeigt:

Für $n = 1, 3, 5, \dots$ ist $H_n(S'; R) \approx S_{n-1}^0 \cap Z_{n-1}(S)/Z_{n-1}(S)^0 \approx J_0/J_0^2 \approx R/pR$, für $n = 2, 4, 6, \dots$ ist

$H_n(S'; R) \approx S_{n-1}^0 \cap Z_{n-1}(S)/Z_{n-1}(S)^0 \approx pR$.

Für $R = \text{Restklassenring } \mathbb{Z}_p$ erhalten wir wegen $p\mathbb{Z}_p = 0$ und

$p(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ $H_n(S'; \mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_p$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(8.21) Hilfssatz.

Es sei R eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe, $p \in \mathbb{N}$

mit $p \geq 2$, und es seien $a_{ij} \in R$, $i, j = 1, \dots, p-1$. Für

$k = 1, \dots, p-1$ sei $A_{p,k} := -\sum_{i=1}^{p-1} a_{ik} - \sum_{j=1}^{p-1} a_{kj} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=k}}^{p-1} a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+k}}^{p-1} a_{ij}$.

Dann ist $\sum_{k=1}^{p-1} k A_{p,k} = -p \sum_{\substack{i,j=1 \\ p \nmid i+j \nmid 2(p-1)}}^{p-1} a_{ij}$.

Beweis.

Induktion nach p .

a) $p = 2$:

$$\sum_{k=1}^1 k A_{2,k} = A_{2,1} = -a_{11} - a_{11} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=1}}^1 a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=3}}^1 a_{ij} = -2a_{11} - \\ = -2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ 2 \leq i+j \leq 2}}^1 a_{ij}.$$

b) Wir nehmen an, die behauptete Formel sei richtig für p und zeigen ihre Gültigkeit für $p+1$ anstelle von p .

Zunächst ist nach Definition von $A_{p+1,k}$ ($k = 1, \dots, p-1$)

$$\begin{aligned} A_{p+1,k} &= - \sum_{i=1}^p a_{ik} - \sum_{j=1}^p a_{kj} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=k}}^p a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1+k}}^p a_{ij} = \\ &= - \sum_{i=1}^{p-1} a_{ik} - a_{pk} - \sum_{j=1}^{p-1} a_{kj} - a_{kp} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=k}}^{p-1} a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1+k}}^{p-1} a_{ij} + a_{pk} + \\ &+ a_{kp} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+k}}^p a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1+k}}^p a_{ij} = A_{p,k} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+k}}^p a_{ij} + \\ &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1+k}}^p a_{ij}. \text{ Damit gilt (mit } \sum_{k=1}^0 := 0) \\ \sum_{k=1}^p k A_{p+1,k} &= \sum_{k=1}^{p-1} k A_{p+1,k} + p A_{p+1,p} = \sum_{k=1}^{p-1} k A_{p,k} - \sum_{k=1}^{p-1} k \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+k}}^p a_{ij} + \\ &+ \sum_{k=1}^{p-1} k \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1+k}}^p a_{ij} + p A_{p+1,p} = \sum_{k=1}^{p-1} k A_{p,k} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1}}^p a_{ij} - \\ &- \sum_{\ell=1}^{p-2} (1+\ell) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1+\ell}}^p a_{ij} + \sum_{k=1}^{p-2} k \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1+k}}^p a_{ij} + (p-1) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=2p}}^p a_{ij} + p A_{p+1,p} = \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} k A_{p,k} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1}}^p a_{ij} - \sum_{k=1}^{p-2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1+k}}^p a_{ij} + (p-1) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=2p}}^p a_{ij} + p A_{p+1,p} = \\ &= -p \sum_{\substack{i,j=1 \\ p \leq i+j \leq 2(p-1)}}^{p-1} a_{ij} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ p+1 \leq i+j \leq 2p-1}}^p a_{ij} + p \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=2p}}^p a_{ij} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=2p}}^p a_{ij} - p \sum_{i=1}^p a_{ip} - \\ &- p \sum_{j=1}^p a_{pj} + p \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p}}^p a_{ij} + p \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p+1+p}}^p a_{ij} = - \sum_{\substack{i,j=1 \\ p+1 \leq i+j \leq 2p}}^p a_{ij} - \\ &- p \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p}}^{p-1} a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ p+1 \leq i+j \leq 2p-2}}^{p-1} a_{ij} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=2p}}^{p-1} a_{ij} + \sum_{i=1}^p a_{ip} + \sum_{j=1}^p a_{pj} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=p}}^{p-1} a_{ij} \right) = \\ &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ p+1 \leq i+j \leq 2p}}^p a_{ij} - p \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ p+1 \leq i+j \leq 2p-2}}^{p-1} a_{ij} - a_{pp} + \sum_{i=1}^{p-1} a_{ip} + a_{pp} + \sum_{j=1}^{p-1} a_{pj} + a_{pp} \right) = \\ &= - \sum_{\substack{i,j=1 \\ p+1 \leq i+j \leq 2p}}^p a_{ij} - p \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ p+1 \leq i+j \leq 2p-2}}^{p-1} a_{ij} + \sum_{\substack{i,p \text{ oder } j=p \\ p+1 \leq i+j \leq 2p-2}} a_{ij} + a_{p-1,p} + a_{p,p-1} + a_{pp} \right) = \end{aligned}$$

$$= - \sum_{\substack{i,j=1 \\ p+1 \leq i+j \leq 2p}}^p a_{ij} - p \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ p+1 \leq i+j \leq 2p-2}}^p a_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ 2p-1 \leq i+j \leq 2p}}^p a_{ij} \right) = - (p+1) \sum_{\substack{i,j=1 \\ p+1 \leq i+j \leq 2p}}^p a_{ij}.$$

(8.22) Bemerkung.

Es seien die Voraussetzungen von (8.1) erfüllt, wobei wir aber anstelle des Koeffizientenringes $\mathbb{Z}_p$ allgemeiner einen Ring R mit Einselement betrachten, für den $R/pR \neq 0$ und $pR \neq 0$ gilt. Aus (8.20) ergibt sich, daß $\hat{Q}_* : H_N(M'; R) \rightarrow H_N(S'; R)$ surjektiv ist, und wegen $H_N(S'; R) \approx R/pR$ für $n=1,3,5,\dots$, $H_N(S'; R) \approx pR$ für $n=2,4,6,\dots$, ist somit $\hat{Q}_* : H_N(M'; R) \rightarrow H_N(S'; R)$ nichttrivial. Ferner läßt sich zeigen, daß für jeden Ring R $H_q(F'_{n,p}; R) = 0$ für alle $q \gg n$ gilt. Damit bleibt (8.1) richtig, wenn man anstelle des Koeffizientenbereichs $\mathbb{Z}_p$ Ringe R mit Einselement betrachtet, für die die Abbildung $R \rightarrow R$, $r \mapsto pr$, weder surjektiv noch injektiv ist. Eine entsprechende Fassung von (8.1) für Kohomologie (vgl. (8.29)) werden wir jedoch nur für $R = \mathbb{Z}_p$ formulieren und beweisen.

Wir zeigen nun, daß $H_q(F'_{n,p}; R) = 0$ für alle $q \gg n$ gilt, wobei R ein beliebiger Ring sein kann. Dazu weisen wir nach, daß $F'_{n,p}$ ein "sphärischer Komplex" ist (vgl. [10], Part II, 19., insbesondere Definition auf S. 85 oben). Genauer werden wir sehen, daß $F'_{n,p}$ aus dem eipunktigen Raum $F'_{1,p}$ durch wiederholtes "Ankleben von Kugeln" entsteht. Für die Homologie sphärischer Komplexe stehen Formeln zur Verfügung (vgl. [10], (19.16) - (19.18)), mit deren Hilfe sich das gewünschte Resultat leicht herleiten läßt.

(8.23) Definition (vgl. [10], S. 83).

Es seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$, und $f : A \rightarrow Y$ stetig. O.B.d.A. können wir annehmen, daß X und Y disjunkt sind.

(Andernfalls gehen wir zu geeigneten homöomorphen Räumen über.) Die disjunkte Vereinigung $X \dot{\cup} Y$ werde mit der Summentopologie versehen, d.h. $U \subset X \dot{\cup} Y$ ist genau dann offen, wenn $U \cap X$ offen in X und $U \cap Y$ offen in Y ist. Auf $X \dot{\cup} Y$ wird eine Äquivalenzrelation $\sim$ erklärt: Für $z, z' \in X \dot{\cup} Y$ sei $z \sim z'$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- 1) $z = z'$
- 2) $z \in A$ und $z' = f(z)$
- 3) $z' \in A$ und $z = f(z')$
- 4) $z, z' \in A$ und $f(z) = f(z')$, d.h. $a \in A$ und $f(a)$ werden identifiziert.

Für $z \in X \dot{\cup} Y$ bezeichne $[z]$ die Äquivalenzklasse von z bzgl. $\sim$ und es sei $X \cup_f Y := \{[z] \mid z \in X \dot{\cup} Y\}$. Ferner sei $j : X \dot{\cup} Y \rightarrow X \cup_f Y, z \mapsto [z]$, die kanonische Abbildung und $X \cup_f Y$ werde mit der Identifizierungstopologie bzgl. j versehen. Dann heißt $X \cup_f Y$ der aus Y durch Ankleben von X vermöge f entstandene Raum.

(8.24) Bemerkung.

Man kann zeigen, daß $j|_Y : Y \rightarrow j(Y) \subset X \cup_f Y$ ein Homöomorphismus ist, und somit kann Y als Teilraum von $X \cup_f Y$ aufgefaßt werden.

Im folgenden wird speziell der Fall $X = E^n, A = S^{n-1}, f : S^{n-1} \rightarrow Y$ betrachtet (Ankleben von Kugeln). Das folgende Lemma liefert ein Kriterium dafür, wann ein topologischer Raum aus einem Teilraum durch Ankleben einer Kugel entsteht.

(8.25) Lemma ([10], Exercise (19.4)).

Es sei Z ein separierter topologischer Raum, $Y \subset Z$ sei abgeschlossen, $\bar{f} : E^n \rightarrow Z$ sei stetig mit $\bar{f}(S^{n-1}) \subset Y$ und $\bar{f}|_{\mathring{E}^n}$ bilde $\mathring{E}^n$ homöomorph auf $Z \setminus Y$ ab. Es sei $f := \bar{f}|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow Y$. Dann ist Z homöomorph zu $E^n \cup_f Y$, d.h. Z entsteht aus Y durch Ankleben von E^n vermöge f .

(8.26) Bemerkung.

Es genügt in (8.25) vorauszusetzen, daß $\bar{f}|_{\mathring{E}^n} : \mathring{E}^n \rightarrow Z \setminus Y$ bijektiv auf $Z \setminus Y$ abbildet. $\bar{f}|_{\mathring{E}^n} : \mathring{E}^n \rightarrow Z \setminus Y$ ist dann automatisch ein Homöomorphismus: Wegen $\bar{f}(S^{n-1}) \subset Y$ und $\bar{f}(\mathring{E}^n) = Z \setminus Y$ gilt für jede Teilmenge $A \subset E^n$ $\bar{f}(A \cap \mathring{E}^n) = \bar{f}(A) \cap (Z \setminus Y)$. Da E^n kompakt und Z separiert ist, ist für abgeschlossenes $A \subset E^n$ $\bar{f}(A)$ abgeschlossen in Z und folglich ist $\bar{f}|_{\mathring{E}^n}$ abgeschlossen, also ein Homöomorphismus.

Mit Hilfe von (8.25) und (8.26) zeigen wir nun:

(8.27) Lemma.

$F'_{n+1,p}$ entsteht aus $F'_{n,p}$ durch Ankleben von E^n ($n \in \mathbb{N}$).

Beweis.

Da $F'_{n+1,p}$ separiert ist, folgt mit (2.3), daß auch

$F'_{n+1,p} = F_{n+1,p}/\mathbb{Z}_p$ separiert ist. Als nächstes zeigen wir,

daß $F'_{n,p} = F_{n,p}/\mathbb{Z}_p$ als abgeschlossener Teilraum von $F'_{n+1,p}$

aufgefaßt werden kann: Seien $P_n : F_{n,p} \rightarrow F'_{n,p}$,

$P_{n+1} : F_{n+1,p} \rightarrow F'_{n+1,p}$ die kanonischen Projektionen und sei

$k : F_{n,p} \hookrightarrow F_{n+1,p}$. Ferner sei $\hat{k} : F'_{n,p} \rightarrow F'_{n+1,p}$ die von k

induzierte stetige Abbildung, d.h. es ist

$\hat{k}(P_n(z)) = P_{n+1}(k(z))$ für alle $z \in F_{n,p}$. (Man beachte $\varphi_{n+1,p} \circ k = k \circ \varphi_{n,p}$.) Dann ist
 $\hat{k}(F'_{n,p}) = (\hat{k} \circ P_n)(F_{n,p}) = (P_{n+1} \circ k)(F_{n,p}) = P_{n+1}(F_{n,p})$, und
 wegen $F_{n,p}$ abgeschlossen in $F_{n+1,p}$ und P_{n+1} abgeschlossen
 (vgl. Anfang des Beweises von (1.11)) ist $P_{n+1}(F_{n,p})$ abge-
 schlossen in $F'_{n+1,p}$. Wir zeigen, daß $\hat{k}$, aufgefaßt als
 Abbildung $F'_{n,p} \rightarrow \hat{k}(F'_{n,p}) = P_{n+1}(F_{n,p})$, ein Homöomorphismus
 ist, und können dann $F'_{n,p}$ vermöge $\hat{k}$ mit der abgeschlosse-
 nen Teilmenge $P_{n+1}(F_{n,p}) \subset F'_{n+1,p}$ identifizieren. Offen-
 sichtlich genügt es zu zeigen, daß $\hat{k}$ injektiv und abge-
 schlossen ist. Seien $\bar{x}, \bar{y} \in F'_{n,p}$ mit $\bar{x} = P_n(x)$, $\bar{y} = P_n(y)$,
 $x, y \in F_{n,p}$ und gelte $\hat{k}(\bar{x}) = \hat{k}(\bar{y})$. Aus
 $P_{n+1}(k(x)) = \hat{k}(P_n(x)) = \hat{k}(\bar{x}) = \hat{k}(\bar{y}) = \hat{k}(P_n(y)) = P_{n+1}(k(y))$
 folgt $k(y) = \varphi_{n+1,p}^1(k(x)) = k(\varphi_{n,p}^1(x))$ mit $1 \in \{0, \dots, p-1\}$,
 und somit ist $y = \varphi_{n,p}^1(x)$, woraus
 $\bar{y} = P_n(y) = P_n(\varphi_{n,p}^1(x)) = P_n(x) = \bar{x}$ folgt. Es sei nun
 $A' \subset F'_{n,p}$ abgeschlossen in $F'_{n,p}$. Dann ist $A := P_n^{-1}(A') \subset F_{n,p}$
 abgeschlossen in $F_{n,p}$, und wegen der Surjektivität von P_n
 ist $P_n(A) = A'$. Es folgt $\hat{k}(A') = \hat{k}(P_n(A)) = P_{n+1}(k(A)) = P_{n+1}(A)$,
 und wegen der Abgeschlossenheit von P_{n+1} ist $\hat{k}(A')$ abge-
 schlossen in $F'_{n+1,p}$. Insbesondere ist also
 $\hat{k} : F'_{n,p} \rightarrow \hat{k}(F'_{n,p})$ abgeschlossen.

Wir zeigen nun, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Abbildung
 $f : E^n \rightarrow F'_{n+1,p}$ existiert, derart, daß $\bar{f}(S^{n-1}) \subset F'_{n,p}$ gilt
 und $\bar{f}|_{E^n} : E^n \rightarrow F'_{n+1,p} \setminus F'_{n,p}$ bijektiv auf $F'_{n+1,p} \setminus F'_{n,p}$ abbildet. Nach
 (8.25) und (8.26) ist dann $F'_{n+1,p}$ homöomorph zu $E^n \cup_f F'_{n,p}$
 mit $f := \bar{f}|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow F'_{n,p}$. Wir unterscheiden zwei
 Fälle:

a) n ungerade.

Es sei

$$G_{n+1,p} := \{(z_1, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}, 0, \dots) \in F_{n+1,p} \mid \arg z_{\frac{n+1}{2}} \in [0, \frac{2\pi}{p}]\} \subset F_{n+1,p},$$

$$G_{n+1,p}^0 := \{(z_1, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}, 0, \dots) \in G_{n+1,p} \mid \arg z_{\frac{n+1}{2}} \in (0, \frac{2\pi}{p})\},$$

$$G_{n+1,p}^1 := \{(z_1, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}, 0, \dots) \in G_{n+1,p} \mid \arg z_{\frac{n+1}{2}} \in [0, \frac{2\pi}{p}]\} \subset F_{n,p}$$

und es sei $h : G_{n+1,p} \rightarrow E^n$,

$$h(z_1, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}, 0, \dots) := (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_{\frac{n+1}{2}}, |z_{\frac{n+1}{2}}| \cos(\frac{p}{2} \arg z_{\frac{n+1}{2}})).$$

h ist Homöomorphismus und es gilt $h(G_{n+1,p}^0) = \overset{\circ}{E}^n$,

$$h(G_{n+1,p}^1) = S^{n-1}. \text{ Es sei } l : G_{n+1,p} \xrightarrow{\sim} F_{n+1,p} \text{ und}$$

$$f' := l \circ h^{-1} : E^n \rightarrow F_{n+1,p}. f' \text{ ist stetig und injektiv und}$$

$$\text{ferner gilt } f'(\overset{\circ}{E}^n) = G_{n+1,p}^0 \text{ sowie } f'(S^{n-1}) = G_{n+1,p}^1 \subset F_{n,p}.$$

Wir definieren nun $\bar{f} : E^n \rightarrow F_{n+1,p}'$ durch $\bar{f} := P_{n+1} \circ f'$.

Die Stetigkeit von $\bar{f}$ ist klar. Weiter gilt

$$\bar{f}(S^{n-1}) = P_{n+1}(f'(S^{n-1})) \subset P_{n+1}(F_{n,p}) = F_{n,p}' \text{ (man beachte die}$$

oben vorgenommene Identifizierung von $P_{n+1}(F_{n,p})$ und $F_{n,p}'$)

$$\text{und } \bar{f}(\overset{\circ}{E}^n) = P_{n+1}(f'(\overset{\circ}{E}^n)) = P_{n+1}(G_{n+1,p}^0) =$$

$$= F_{n+1,p}' \setminus P_{n+1}(F_{n,p}) = F_{n+1,p}' \setminus F_{n,p}'. \text{ Da } f'|_{\overset{\circ}{E}^n} : \overset{\circ}{E}^n \rightarrow G_{n+1,p}^0$$

und $P_{n+1}|_{G_{n+1,p}^0} : G_{n+1,p}^0 \rightarrow F_{n+1,p}' \setminus F_{n,p}'$ injektiv sind, ist

$$\bar{f}|_{\overset{\circ}{E}^n} : \overset{\circ}{E}^n \rightarrow F_{n+1,p}' \setminus F_{n,p}' \text{ injektiv und somit bijektiv.}$$

b) n gerade.

Wir setzen

$$B_{n+1,p} := \{(z_1, \dots, z_{\frac{n+2}{2}}, 0, \dots) \in F_{n+1,p} \mid z_{\frac{n+2}{2}} \in \mathbb{R}_0^+\} \subset F_{n+1,p},$$

$$B_{n+1,p}^0 := \{(z_1, \dots, z_{\frac{n+2}{2}}, 0, \dots) \in B_{n+1,p} \mid z_{\frac{n+2}{2}} \in \mathbb{R}^+\},$$

$$B_{n+1,p}^1 := \{(z_1, \dots, z_{\frac{n+2}{2}}, 0, \dots) \in B_{n+1,p} \mid z_{\frac{n+2}{2}} = 0\} = F_{n,p} \text{ und}$$

definieren $h : E^n \rightarrow B_{n+1,p}$ durch

$$h(x_1, \dots, x_n) := (x_1 + ix_2, \dots, x_{n-1} + ix_n, \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}, 0, 0, \dots).$$

Mit $l : B_{n+1,p} \xrightarrow{\sim} F_{n+1,p}$ sei noch $f' := l \circ h : E^n \rightarrow F_{n+1,p}'$.

f' ist offensichtlich stetig und injektiv, und zudem gilt $f'(\overset{\circ}{E}^n) = B_{n+1,p}^0$ und $f'(S^{n-1}) = B_{n+1,p}^1 = F_{n,p}$. Es sei nun $\bar{f} := P_{n+1} \circ f' : E^n \rightarrow F'_{n+1,p}$. $\bar{f}$ ist trivialerweise stetig und es gilt $\bar{f}(S^{n-1}) = P_{n+1}(f'(S^{n-1})) = P_{n+1}(F_{n,p}) = F'_{n,p}$ sowie $\bar{f}(\overset{\circ}{E}^n) = P_{n+1}(f'(\overset{\circ}{E}^n)) = P_{n+1}(B_{n+1,p}^0) = F'_{n+1,p} \setminus P_{n+1}(F_{n,p}) = F'_{n+1,p} \setminus F'_{n,p}$. Ferner sind $f'|_{\overset{\circ}{E}^n} : \overset{\circ}{E}^n \rightarrow B_{n+1,p}^0$ und $P_{n+1}|_{B_{n+1,p}^0} : B_{n+1,p}^0 \rightarrow F'_{n+1,p} \setminus F'_{n,p}$ injektiv, und folglich ist $\bar{f}|_{\overset{\circ}{E}^n} : \overset{\circ}{E}^n \rightarrow F'_{n+1,p} \setminus F'_{n,p}$ injektiv und somit bijektiv.

Aufgrund von (8.27) lässt sich nun sehr bequem zeigen, daß $H_q(F'_{n,p}; R) = 0$ für alle $q \gg n$ (R ein beliebiger Ring) ist. Wir verwenden dazu die folgende Aussage:

(8.28) Lemma ([10], (19.16)).

Der topologische Raum Z entstehe aus dem Raum Y durch Ankleben von E^n ($n \in \mathbb{N}$). Dann ist $\tilde{H}_q(Z; R) \approx \tilde{H}_q(Y; R)$ für $q \neq n$ und $q \neq n-1$ (Homologiemoduln im Sinne der reduzierten Theorie).

Nachweis von $H_q(F'_{n,p}; R) = 0$ für $q \gg n$.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n .

$n = 1$: Da $F'_{1,p} = F_{1,p}/\mathbb{Z}_p$ nur aus einem Punkt besteht, ist trivialerweise $H_q(F'_{1,p}; R) = 0$ für alle $q \gg 1$.

Induktionsannahme: $H_q(F'_{n,p}; R) = 0$ für alle $q \gg n$.

Nach (8.27) entsteht $F'_{n+1,p}$ aus $F'_{n,p}$ durch Ankleben von E^n .

Nach (8.28) ist dann insbesondere

$$H_q(F'_{n+1,p}; R) = \tilde{H}_q(F'_{n+1,p}; R) \approx \tilde{H}_q(F'_{n,p}; R) = H_q(F'_{n,p}; R) \text{ für}$$

alle $q \gg n+1$. Aufgrund der Induktionsannahme folgt daher trivialerweise $H_q(F'_{n+1,p}; R) = 0$ für alle $q \gg n+1$.

Der Beweis von (8.1) ist damit abgeschlossen. Für den folgenden Abschnitt 9 benötigen wir noch eine entsprechende Fassung von (8.1) für Kohomologie. Diese Version von (8.1) werden wir jedoch sehr leicht aus (8.1) erhalten. Dabei reicht es für unsere Zwecke aus, als Koeffizientenbereich den Körper $\mathbb{Z}_p$ zu betrachten.

(8.29) Satz (vgl. [21], Korollar 1 zu Theorem 17 und Bemerkung auf S. 103 und [23], Korollar 1 zu Theorem 3)

Es sei $M \neq \emptyset$ ein separierter bogenzusammenhängender Raum, p prim, $f : M \rightarrow M$ freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion, $N \in \mathbb{N}$. $g'(M, f)$ sei definiert und es gelte $H^q(M; \mathbb{Z}_p) = 0$ für $0 < q < N$ (o.B.d.A. kann man $N \gg 2$ annehmen, vgl. (8.2a)).

Dann ist $g'(M, f) > N$.

Beweis.

Da $\mathbb{Z}_p$ ein Körper ist, gibt es einen kanonischen Isomorphismus $H^q(M; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\sim} H_q(M; \mathbb{Z}_p)^*$ ($q \neq 0$), wobei $H_q(M; \mathbb{Z}_p)^*$ den zu $H_q(M; \mathbb{Z}_p)$ dualen Vektorraum über $\mathbb{Z}_p$ bezeichnet (vgl. etwa [10], (23.7) und (23.14)). Wegen $0 = H^q(M; \mathbb{Z}_p) \approx H_q(M; \mathbb{Z}_p)^*$ für $0 < q < N$ ist $H_q(M; \mathbb{Z}_p) = 0$ für $0 < q < N$, und folglich ist nach (8.1) $g'(M, f) > N$.

9. Einordnung von Resultaten von Cohen, Connett, Lusk, Munkholm in den Rahmen der Theorie des Geschlechts eines Raumes.

Im folgenden sollen einige Resultate von Cohen, Connett, Lusk, Munkholm mit Hilfe von (5.4), (5.5), (7.7), (8.1), (8.29) bewiesen werden. Teilweise werden wir sogar Verallgemeinerungen bzw. Verschärfungen dieser Resultate erhalten. Unter einer mod p Homologie n -Sphäre $\mathcal{Q}^n$ (p prim, $n \in \mathbb{N}$) verstehen wir im folgenden einen Hausdorff-Raum $\mathcal{Q}^n$ mit $H_0(\mathcal{Q}^n; \mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_p \approx H_n(\mathcal{Q}^n; \mathbb{Z}_p)$ und $H_q(\mathcal{Q}^n; \mathbb{Z}_p) = 0$ für $q \neq 0, n$. Insbesondere ist $\mathcal{Q}^n$ also bogenzusammenhängend.

(9.1) ((9.1) ist ein Spezialfall von Theorem 2 in [16] und eine Variante des mod p Bourgin-Yang theorem in [19])

Es sei p prim, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. Es sei $\mathcal{Q}^n$ eine mod p Homologie n -Sphäre, $f: \mathcal{Q}^n \rightarrow \mathcal{Q}^n$ sei freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion auf $\mathcal{Q}^n$,

$h: \mathcal{Q}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig. Es gelte $n \gg m(p-1)$.

Dann gibt es ein $x \in \mathcal{Q}^n$ mit $h(x) = h(f(x)) = \dots = h(f^{p-1}(x))$.

(9.2) ([5], Theorem 1, im Fall $q=2$ ist (9.2) ein Spezialfall von [4], Theorem 1.)

Es sei p prim, $q \in \{2, \dots, p\}$, $m \in \mathbb{N}$. Es sei M ein bogenzusammenhängender Hausdorff-Raum, $f : M \rightarrow M$ freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion,

$h : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig.

Es gelte $H^j(M; \mathbb{Z}_p) = 0$ für $0 < j < (m-1)(p-1)+q-1$.

Dann gibt es ein $x \in M$ und $i_1, \dots, i_q \in \{0, \dots, p-1\}$,

$i_1 < i_2 < \dots < i_q$, mit $h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x)) = \dots = h(f^{i_q}(x))$.

Bemerkung zu (9.2).

a) In [5], Theorem 1 wird zusätzlich vorausgesetzt, daß im Fall $q \neq 2$ $q \gg \frac{1}{2}(p+1)$ ist. Wie in [5] bemerkt wird, ist diese Einschränkung allein aus beweistechnischen Gründen nötig. Der hier angegebene Beweis von (9.2) zeigt, daß die Zusatzvoraussetzung tatsächlich weggelassen werden kann.

b) Im Fall $q = 2$ läßt sich (9.2) noch verschärfen: Unter den Voraussetzungen von (9.2) werden wir zeigen, daß zu vorgegebenen $i_1, i_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ ein $x \in M$ mit $h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x))$ existiert.

(9.3) ((9.3) ist ein Spezialfall von [16], Theorem 1.)

Es sei p prim, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. Es sei $\mathcal{G}^n$ eine mod p Homologie n -Sphäre, $f : \mathcal{G}^n \rightarrow \mathcal{G}^n$ freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion, $h : \mathcal{G}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Es gelte $n \gg (m-1)(p-1)+1$.

Dann gibt es ein $x \in \mathcal{G}^n$ mit $h(x) = h(f(x))$.

(9.4) ([3], Theorem 1, der Fall $m=1$ ist in [7], Theorem 1 enthalten.)

Es sei $p \in \mathbb{N}$ nicht notwendig prim, $p \gg 2$, $m \in \mathbb{N}$. Es sei M ein Hausdorff-Raum, $f : M \rightarrow M$ freie $\mathbb{Z}_p$ -Aktion ("frei" bedeutet hier, daß f^j fixpunktfrei ist für alle $j \in \{1, \dots, p-1\}$) und es sei $h : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. M sei $(m-1)(p-1)$ -zusammenhängend. Dann gibt es ein $x \in M$ und ein $i \in \{1, \dots, p-1\}$ mit $h(x) = h(f^i(x))$.

Bemerkung zu (9.4).

a) Falls p Primzahl ist, werden wir zeigen, daß zu vorgegebenen $i_1, i_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ ein $x \in M$ mit $h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x))$ existiert.

b) Die Existenz eines $i \in \{1, \dots, p-1\}$ und eines $x \in M$ mit $h(x) = h(f^i(x))$ läßt sich dann für jedes $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ leicht beweisen: Es sei p' prim, $i \in \{1, \dots, p-1\}$ mit $p = ip'$. $\tilde{f} := f^i$ ist dann freie $\mathbb{Z}_{p'}$ -Aktion auf M , M ist trivialerweise $(m-1)(p'-1)$ -zusammenhängend, und folglich gibt es nach a) ein $x \in M$ mit $h(x) = h(\tilde{f}(x)) = h(f^i(x))$.

Beweis von (9.1) - (9.4).

Wir nehmen jeweils an, die Behauptung wäre falsch, und wenden (5.4) bzw. (5.5) an. Aufgrund von (7.7), (8.1), (8.2) werden wir dann in allen Fällen einen Widerspruch erhalten.

In (9.1) besagt unsere Annahme, daß für alle $x \in \mathcal{G}^n$ $\text{card}\{h(x), h(f(x)), \dots, h(f^{p-1}(x))\} \geq 2$ ist, woraus nach (5.4) ($q=p$) die Existenz von $g'(\mathcal{G}^n, f)$ und die Ungleichung $g'(\mathcal{G}^n, f) \leq m(p-1)$ folgt. Wegen $n \geq m(p-1)$ ist aber andererseits $H_j(\mathcal{G}^n; \mathbb{Z}_p) = 0$ für $0 < j < m(p-1)$ und somit gilt nach (8.1) $g'(\mathcal{G}^n, f) > m(p-1)$. (O.B.d.A. können wir wegen (8.2) annehmen, daß $m(p-1) > 1$ ist. Entsprechendes gilt auch im folgenden, da alle betrachteten Räume bogenzusammenhängend sind.)

In (9.2) bedeutet die obige Annahme, daß für alle $x \in M$ und für alle $i_1, \dots, i_q \in \{0, \dots, p-1\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_q$ $\text{card}\{h(f^{i_1}(x)), \dots, h(f^{i_q}(x))\} \geq 2$ ist. Nach (5.4) ist dann $g'(M, f)$ definiert und es gilt $g'(M, f) \leq (m-1)(p-1) + q - 1$. Wegen

$H^j(M; \mathbb{Z}_p) = 0$ für $0 < j < (m-1)(p-1)+q-1$ müßte aber nach (8.29) $g'(M, f) > (m-1)(p-1)+q-1$ sein.

Im Fall $q=2$ in (9.2) machen wir die schwächere Annahme, daß es $i_1, i_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ mit $h(f^{i_1}(x)) \neq h(f^{i_2}(x))$ für alle $x \in M$ gibt. Nach (5.5) ist dann $g'(M, f)$ definiert und es gilt $g'(M, f) \leq (m-1)(p-1)+1$. Andererseits liefert (8.29) die Ungleichung $g'(M, f) > (m-1)(p-1)+1$, und daher muß es zu beliebigen $i_1, i_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ ein $x \in M$ mit $h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x))$ geben. Aus der Annahme $h(x) \neq h(f(x))$ für alle $x \in \mathcal{G}^n$ in (9.3) folgt mit (5.5) die Existenz von $g'(\mathcal{G}^n, f)$ und die Abschätzung $g'(\mathcal{G}^n, f) \leq (m-1)(p-1)+1$. Wegen $H_j(\mathcal{G}^n, f) = 0$ für $0 < j < (m-1)(p-1)+1$ müßte aber nach (8.1)

$g'(\mathcal{G}^n, f) > (m-1)(p-1)+1$ sein, und folglich existiert ein $x \in \mathcal{G}^n$ mit $h(x) = h(f(x))$. Natürlich könnte man auch hier zeigen, daß für alle $i_1, i_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ ein $x \in \mathcal{G}^n$ mit $h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x))$ existiert. Wie schon oben erwähnt, genügt es zum Beweis von (9.4) den Fall p prim zu betrachten. Wir zeigen, daß in diesem Fall für alle $i_1, i_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ ein $x \in M$ mit $h(f^{i_1}(x)) = h(f^{i_2}(x))$ existiert. Wäre das falsch, so wäre wieder nach (5.5) $g'(M, f)$ definiert und $g(M, f) \leq g'(M, f) \leq (m-1)(p-1)+1$. (Man beachte noch (1.8).) Wegen M $(m-1)(p-1)$ -zusammenhängend muß aber nach (7.7) $g(M, f) > (m-1)(p-1)+1$ sein. (Zum Beweis von (9.4) könnte man anstelle von (7.7) auch wieder (8.1) anwenden, denn aus M $(m-1)(p-1)$ -zusammenhängend folgt mit dem Satz von Hurewicz und dem Satz über universelle Koeffizienten $H_j(M; \mathbb{Z}_p) = 0$ für $0 < j < (m-1)(p-1)+1$.)

Anhang

Beweis von Lemma (8.11).

Es sei $X_{-1} := Y_{-1} := R$ und $Q_{-1} := \text{id}_R$.

a) Beweis von (8.11a).

a₁) Es sei T_0 eine J -Basis von X_0 . Für $t \in T_0$ ist $d_0 t \in R$, und da d'_0 surjektiv ist, existiert zu t ein $y_t \in Y_0$ mit $d'_0 y_t = d_0 t$. Zu jedem $t \in T_0$ sei ein solches $y_t \in Y_0$ fest gewählt. Es sei $x \in X_0$. x besitzt eine eindeutige Darstellung

$x = \sum_{t \in T_0} u_t t$ ($u_t \in J$ fast alle Null), und wir setzen

$Q_0 x := \sum_{t \in T_0} u_t y_t \in Y_0$. Dadurch wird ein J -Homomorphismus

$Q_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ definiert, für den gilt (x wie oben):

$$d'_0 Q_0 x = d'_0 \left(\sum u_t y_t \right) = \sum u_t d'_0 y_t = \sum u_t d_0 t = d_0 \left(\sum u_t t \right) = \text{id}_R d_0 x.$$

a₂) Es sei $1 \leq n \leq N$. Wir nehmen an, Q_1 sei für $1 \leq n-1$ bereits definiert, und definieren Q_n wie folgt:

T_n sei eine J -Basis von X_n . Für $t \in T_n$ ist $d_{n-1} d_n t = 0$

(Exaktheit). Folglich gilt $d'_{n-1} Q_{n-1} d_n t = Q_{n-2} d_{n-1} d_n t = 0$,

und daher ist $Q_{n-1} d_n t \in \text{Ker } d'_{n-1} = \text{Im } d'_n$. Es gibt also ein

$y_t \in Y_n$ mit $Q_{n-1} d_n t = d'_n y_t$. Für jedes $t \in T_n$ werde ein solches $y_t \in Y_n$ fest gewählt. Es sei $x \in X_n$ mit der eindeutigen

Darstellung $x = \sum_{t \in T_n} u_t t$ ($u_t \in J$ fast alle Null). Durch

$Q_n x := \sum_{t \in T_n} u_t y_t \in Y_n$ wird offensichtlich ein J -Homomorphismus

$X_n \rightarrow Y_n$ definiert, und es gilt (x wie oben):

$$d'_n Q_n x = \sum u_t d'_n y_t = \sum u_t Q_{n-1} d_n t = Q_{n-1} d_n x.$$

b) Beweis von (8.11b).

b₁) Es sei $F_{-1} := \text{id}_R$, $F_n : X_n \rightarrow X_n$ seien J -Homomorphismen mit $F_{n-1} d_n = d_n F_n$, $0 \leq n \leq N$.

Behauptung: Es gibt J -Homomorphismen $f_n : X_n \rightarrow Z_n$ mit $f_n z = F_n z - z$ für alle $z \in Z_n$.

Für $x \in X_0$ setzen wir $f_0 x := F_0 x - x \in X_0$. Wegen

$$d_0 f_0 x = d_0 F_0 x - d_0 x = F_{-1} d_0 x - d_0 x = 0 \text{ ist } f_0 x \in \text{Ker } d_0 = Z_0.$$

Damit ist f_0 ein J -Homomorphismus $X_0 \rightarrow Z_0$ und trivialerweise gilt $f_0 z = F_0 z - z$ für alle $z \in Z_0$.

Wir nehmen an, f_{n-1} sei bereits definiert, und definieren

f_n ($1 \leq n \leq N$): Es sei T_n J -Basis von X_n , T_{n-1} J -Basis von X_{n-1} . Zu $t \in T_n$ gibt es eindeutig bestimmte $v_{ts} \in J$

($s \in T_{n-1}$, v_{ts} fast alle Null) mit $d_n t = \sum_{s \in T_{n-1}} v_{ts} s$. Wegen

$f_{n-1} s \in Z_{n-1} = \text{Ker } d_{n-1} = \text{Im } d_n$ für alle $s \in T_{n-1}$ können wir

zu jedem $s \in T_{n-1}$ ein $x_s \in X_n$ wählen mit $f_{n-1} s = d_n x_s$. Es sei

$x \in X_n$ mit der eindeutigen Darstellung $x = \sum_{t \in T_n} u_t t$ ($u_t \in J$ fast

alle Null). Durch $f_n x := F_n x - x - \sum_{t \in T_n} u_t v_{ts} x_s \in X_n$ wird dann ein J -Homomorphismus $X_n \rightarrow X_n$ definiert, und es gilt (x wie oben):

$$\begin{aligned} d_n f_n x &= d_n F_n x - d_n x - \sum_{t \in T_n} u_t v_{ts} d_n x_s = F_{n-1} d_n x - d_n x - \sum_{t \in T_n} u_t v_{ts} f_{n-1} s = \\ &= F_{n-1} d_n x - d_n x - f_{n-1} \left(\sum_{t \in T_n} u_t \sum_{s \in T_{n-1}} v_{ts} s \right) = F_{n-1} d_n x - d_n x - f_{n-1} \left(\sum_{t \in T_n} u_t d_n t \right) = \\ &= F_{n-1} d_n x - d_n x - f_{n-1} d_n x. \text{ Wegen } d_{n-1} d_n x = 0 \text{ ist} \end{aligned}$$

$d_n x \in \text{Ker } d_{n-1} = Z_{n-1}$ und daher gilt nach Voraussetzung über

f_{n-1} : $f_{n-1} d_n x = F_{n-1} d_n x - d_n x$. Folglich ist $d_n f_n x = 0$, also

$f_n x \in \text{Ker } d_n = Z_n$ und somit ist $f_n : X_n \rightarrow Z_n$.

Es sei nun $z = \sum_{t \in T_n} u_t t \in Z_n$ ($u_t \in J$). Dann ist

$$0 = d_n z = \sum_{t \in T_n} u_t d_n t = \sum_{t \in T_n} u_t \sum_{s \in T_{n-1}} v_{ts} s = \sum_s \left(\sum_{t \in T_n} u_t v_{ts} \right) s, \text{ woraus}$$

$\sum_{t \in T_n} u_t v_{ts} = 0$ für alle $s \in T_{n-1}$ folgt. Damit erhalten wir

$$f_n z = F_n z - z - \sum_{t \in T_n} u_t v_{ts} x_s = F_n z - z - \sum_s \left(\sum_{t \in T_n} u_t v_{ts} \right) x_s = F_n z - z.$$

b_2) Es seien nun $f_n : X_n \rightarrow X_n$ ($-1 \leq n \leq N$) wie in b_1).

Behauptg.: Für alle $z \in X_n^0 \cap Z_n$ gilt $F_n z \equiv z \pmod{Z_n^0}$ ($0 \leq n \leq N$).

Zum Beweis dieser Behauptung wählen wir $f_n : X_n \rightarrow Z_n$

gemäß $b_1)$ ($0 \leq n \leq N$). Es sei nun $z \in X_n^0 \cap Z_n$. Nach Definition von X_n^0 besitzt z eine Darstellung $z = \sum u_x x$ mit $u_x \in J_0$, $x \in X_n$. Wegen $z \in Z_n$ ist $F_n z - z = f_n z = \sum u_x f_n x$, woraus wegen $u_x \in J_0$ und $f_n x \in Z_n$ $F_n z - z \in Z_n^0$, also $F_n z \equiv z \pmod{Z_n^0}$ folgt. Folgerung: Durch $z + Z_n^0 \mapsto F_n z + Z_n^0 = z + Z_n^0$ ($z \in X_n^0 \cap Z_n$) werden die Moduln $(X_n^0 \cap Z_n)/Z_n^0$ identisch auf sich abgebildet ($0 \leq n \leq N$).

$b_2)$ Es seien nun $Q_n : X_n \rightarrow Y_n$ J-Homomorphismen mit $d'_n Q_n = Q_{n-1} d_n$, $0 \leq n \leq N$.

i) Behauptung: Durch $z + Z_n^0 \mapsto Q_n z + Z_n'^0$ ($z \in X_n^0 \cap Z_n$) werden J-Homomorphismen $\bar{Q}_n : (X_n^0 \cap Z_n)/Z_n^0 \rightarrow (Y_n^0 \cap Z_n')/Z_n'^0$ definiert ($0 \leq n \leq N$).

Es genügt zu zeigen, daß $\bar{Q}_n$ wohldefiniert ist. Wegen

$d'_n Q_n = Q_{n-1} d_n$ ist $Q_n(\text{Ker } d_n) \subset \text{Ker } d'_n$, also $Q_n(Z_n) \subset Z_n'$. Da Q_n J-Homomorphismus ist, gilt ferner $Q_n(Z_n^0) \subset Z_n'^0$ und $Q_n(X_n^0) \subset Y_n^0$, also ist auch $Q_n(X_n^0 \cap Z_n) \subset Q_n(X_n^0) \cap Q_n(Z_n) \subset Y_n^0 \cap Z_n'$. Aus $Q_n(X_n^0 \cap Z_n) \subset Y_n^0 \cap Z_n'$ und $Q_n(Z_n^0) \subset Z_n'^0$ folgt die Wohldefiniertheit von $\bar{Q}_n$.

ii) Vertauscht man die Rollen von X_n , Y_n , d_n , d'_n , so liefert Teil a) die Existenz von J-Homomorphismen $P_n : Y_n \rightarrow X_n$ mit $d_n P_n = P_{n-1} d'_n$, $0 \leq n \leq N$, wobei $P_{-1} := \text{id}_R$. Wie in i) zeigt man, daß durch $y + Z_n'^0 \mapsto P_n y + Z_n^0$, $y \in Y_n^0 \cap Z_n'$, J-Homomorphismen $P_n : (Y_n^0 \cap Z_n')/Z_n'^0 \rightarrow (X_n^0 \cap Z_n)/Z_n^0$ definiert werden ($0 \leq n \leq N$).

iii) Es sei nun $F_n := P_n Q_n : X_n \rightarrow X_n$, $G_n := Q_n P_n : Y_n \rightarrow Y_n$, $-1 \leq n \leq N$. Die F_n , G_n sind trivialerweise J-Homomorphismen mit $F_{-1} = G_{-1} = \text{id}_R$, und es gilt für $0 \leq n \leq N$

$d_n F_n = d_n P_n Q_n = P_{n-1} d'_n Q_n = P_{n-1} Q_{n-1} d_n = F_{n-1} d_n$ und analog $d'_n G_n = G_{n-1} d'_n$. Nach Teil $b_2)$ gilt dann für $z \in X_n^0 \cap Z_n$

$\bar{P}_n \bar{Q}_n(z+Z_n^0) = P_n Q_n z + Z_n^0 = F_n z + Z_n^0 = z + Z_n^0$ und analog für
 $z \in Y_n^0 \cap Z_n^1$ $\bar{Q}_n \bar{P}_n(y+Z_n^{1,0}) = y + Z_n^{1,0}$. $\bar{Q}_n, \bar{P}_n$ sind also
 zueinander invers, und somit sind die $\bar{Q}_n$ Isomorphismen
 $(0 \leq n \leq N)$.

Bezeichnungen

$\Leftrightarrow$ logische Äquivalenz

Mengen

$c, \supset, \setminus, \cap, \cup$ diese Zeichen werden in der üblichen Weise verwendet, wobei bei $c, \supset$ die Gleichheit der Mengen nicht ausgeschlossen wird

2^M Potenzmenge von M

$\text{card } M$ Mächtigkeit (Kardinalzahl) von M

Zahlen

N, Z, R, C Menge der natürlichen bzw. ganzen bzw. reellen bzw. komplexen Zahlen

N_0 $N \cup \{0\}$

R^+ Menge der positiven reellen Zahlen

R_0^+ $R^+ \cup \{0\}$

$[a, b]$ $\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$

(a, b) $\{x \in R \mid a < x < b\}$

$\text{sign } x$ $\text{sign } 0 = 0, \text{sign } x = x / |x|$ für $x \neq 0$ ($x \in R$)

$\text{Re } z$ Realteil von z

$\text{Im } z$ Imaginärteil von z

$\arg z$ $\arg 0 = 0$, für $z \neq 0$ dasjenige $u \in [0, 2\pi)$ mit $z = |z|e^{iu}$

$i \equiv j \pmod{p}$ $(i-j)/p \in Z$

Gruppen, Ringe, Moduln

Z_p zyklische Gruppe der Ordnung p , in Kap. IV auch Restklassenring modulo p

e neutrales Element einer multiplikativen Gruppe G

1_R Einselement eines Ringes R

pR $\{pr \mid r \in R\}$

$\tilde{p}$ $\{r \in R \mid pr = 0\}$

$\sum x_i x$ siehe 3. 59

X/Y	Quotientenmodul
$x+Y$	Element von X/Y
$u \equiv v \bmod Y$	$u-v \in Y$
$\approx$	isomorph

Topologische Räume

$\cong$	homöomorph
$\bar{A}$	Abschluß von A
$M/\mathbb{Z}_p, M/G, M'$	vgl. (1.10) bzw. (8.15b)
$X \cup_f Y$	vgl. (8.23)
$H_q(M;R)$	q-ter singulärer Homologiemodul des Raumes M mit Koeffizienten aus einem Ring R; statt $H_q(M;R)$ schreiben wir auch kurz $H_q(M)$ wenn klar ist, welcher Koeffizientenbereich gemeint ist (vgl. (8.15a))
$H^q(M;R)$	q-ter singulärer Kohomologiemodul von M mit Koeffizienten aus R
$\tilde{H}_0(M), Z_q(M), B_q(M)$	vgl. (8.15a)
$\mathbb{R}^m$	m-dimensionaler euklidischer Raum mit Norm $\ x\ = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$ für $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$
$\ x\ $	
$K(x, r)$	$\{y \in \mathbb{R}^m \mid \ y-x\ < r\}$ für $x \in \mathbb{R}^m, r > 0$
E^n	$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x\ \leq 1\}$
$\mathring{E}^n$	$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x\ < 1\}$
S^n	$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ x\ = 1\}$
l_2	} vgl. (7.1)
$\ z\ $	

Abbildungen

$x \mapsto y$	dem Element x wird das Element y zugeordnet (im Sinne einer Abbildung)
fx	Abkürzung für $f(x)$
$\text{Ker } f$	Kern von f
$\text{Im } f$	Bild von f
$f(A), fA$	Bildmenge einer Teilmenge A des Definitionsbereichs von f unter f
$f^{-1}(B)$	Urbildmenge einer Teilmenge B der Zielmenge von f

$f _A$	Einschränkung von f auf A
$\hookrightarrow$	Inklusionsabbildung
id_M	identische Abbildung auf M
$f \circ g, fg$	Komposition zweier Abbildungen f, g
f^k	für $f: M \rightarrow M, k \in \mathbb{N}_0: f^0 = \text{id}_M,$ $f^k = f \circ f^{k-1}$
$f_\#, f_*$	von einer stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen induzierter Homomorphismus auf Ketten- bzw. Homologieniveau
∂_n	Randoperator, für $n=0$ im Sinne der reduzierten Homologietheorie, vgl. (8.15a)

Spezielle Symbole

$\mathcal{C}'(M, f)$	}	vgl. (1.5)
$g'(M, f)$		
$\mathcal{C}(M, f)$	}	vgl. (1.6)
$g(M, f)$		
$Z(G, f)$		
$Z'(D, f)$		
$R(m, p, q)$	}	vgl. (4.1)
$D(m, p, q)$		
$K(m, p)$		
φ_m		
$F_{n,p}, \varphi_{n,p}$		vgl. (7.1)
S, φ		vgl. (7.5)

Spezielle Bezeichnungen in Kapitel IV:

Z^0	vgl. (8.9)
J_0, ε	vgl. (8.12)
X_n	vgl. (8.15a), statt $(X')_n$ schreiben wir kurz X'_n , ebenso schreiben wir X_n^0 statt $(X_n)^0$
$\hat{\mathcal{J}}$	vgl. (8.4), (8.19)
$\mathcal{Y}^n$	vgl. S. 88

Literatur

- [1] K. Borsuk, Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre, Fund. Math. 20 (1933), 177-190.
- [2] F.E. Browder, Group invariance in nonlinear functional analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 986-992.
- [3] F. Cohen, J.E. Connett, A coincidence theorem related to the Borsuk-Ulam theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 218-220.
- [4] F. Cohen, E.L. Lusk, Coincidence point results for spaces with free $\mathbb{Z}_p$ -actions, Proc. Amer. Math. Soc. 49 (1975), 245-252.
- [5] F. Cohen, E.L. Lusk, Configuration-like spaces and the Borsuk-Ulam theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 56 (1976), 313-317.
- [6] P.E. Conner, E.E. Floyd, Fixed point free involutions and equivariant maps, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 416-441.
- [7] J.E. Connett, A generalization of the Borsuk-Ulam theorem, J. London Math. Soc. (2), 7 (1973), 64-66.
- [8] S. Eilenberg, S. Mac Lane, Relations between homology and homotopy groups of spaces, Ann. Math. 46 (1945), 480-509.
- [9] E. Fadell, L. Neuwirth, Configuration spaces, Math. Scand. 10 (1962), 111-118.
- [9^{*}] E. Fadell, F. Rabinowitz, Bifurcation for odd potential operators and an alternative topological index, J. Functional Analysis 26 (1977), 48-67.
- [10] M. Greenberg, Lectures on algebraic topology, 5th printing, W.A. Benjamin, Inc., New York - Amsterdam 1977.

- [11] H. Hopf, Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören, Comment. Math. Helv. 17 (1944/45), 39-79.
- [12] H. Hopf, Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze, Portug. Math. 4 (1945), 129-139.
- [13] I.M. James, On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann, Topology 17 (1978), 331-348.
- [14] M.A. Krasnosel'skiĭ, Über die Berechnung der Drehung eines Vektorfeldes auf der n -dimensionalen Sphäre, Doklady Akad. Nauk SSSR 101 (1955), 401-404 (Russisch).
- [15] M.A. Krasnosel'skiĭ, Über spezielle Überdeckungen der endlichdimensionalen Sphäre, Doklady Akad. Nauk SSSR 107, (1955), 961-964 (Russisch).
- [15]^{*} M.A. Krasnosel'skiĭ, Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Pergamon Press, Oxford 1964.
- [16] E.L. Lusk, The mod p Smith index and a generalized Borsuk-Ulam theorem, Michigan Math. J. 22 (1975), 151-160.
- [17] L. Lusternik, L. Schnirelmann, Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, Actualités scientifiques et industrielles 188, Hermann et Cie., Paris 1934.
- [18] C. Mac Lane, Homology, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.
- [19] H.J. Munkholm, Borsuk-Ulam type theorems for proper $\mathbb{Z}_p$ -actions on (mod p homology) n -spheres, Math. Scand. 24 (1969), 167-185.
- [20] H. Schubert, Topologie, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1964.

- [21] E.H. Spanier, Algebraic topology, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London 1966.
- [22] H. Steinlein, Borsuk-Ulam Sätze und Abbildungen mit kompakten Iterierten, Habilitationsschrift, Universität München (1976), Dissertationes Math., Warszawa, 177 (1980).
- [23] A.S. Švarc, Einige Abschätzungen des Geschlechts eines topologischen Raumes im Sinne von Krasnosel'skiĭ, Uspehi Mat. Nauk 12, 4 (76) (1957), 209-214 (Russisch).
- [24] A.S. Švarc, The genus of a fiber space, I, II, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 10 (1961), 217-272, 11 (1962), 99-126 (Russisch), englische Übersetzung in: Amer. Math. Soc. Transl., Ser. II. 55 (1966), 49-140.
- [25] F. Wille, Verallgemeinerung der Sätze von Borsuk-Ulam und Lusternik-Schnirelmann-Borsuk auf nichtantipodische Punktepaare, Mh. Math. 74 (1970), 351-370.
- [26] C.-T. Yang, On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson, I, Ann. Math. 60 (1954), 262-282.
- [27] C.-T. Yang, On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson, II, Ann. Math. 62 (1955), 271-283.

Lebenslauf

Geburtsdatum 22.8.1950
Geburtsort Langenargen (Bodensee)

Schulbildung

1957 - 1961 Volksschule Langenargen
1961 - 1969 Bodensee-Gymnasium Lindau
Juni 1969 Abitur am Bodensee-Gymnasium Lindau

Studium (Mathematik mit Nebenfach Experimentalphysik)

WS 1969/70 - WS 1972/73 Universität München
Februar 1973 - Mai 1973 Universität Helsinki
WS 1973/74 - SS 1976 Universität München
Juli 1976 Diplomprüfung in Mathematik
ab WS 1976/77 Promotionsstudium Mathematik

WS 1976/77 - SS 1977 und WS 1979/80 - WS 1980/81:

Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen
Institut der Universität München.

D. GRÄBNER

DISSERTATIONEN U. OFFSETDRUCKEREI



Gotenstraße 3
8602 Altendorf bei Bamberg
Telefon: 09545 / 8791